Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu mathematischen Rechnens

WS 2012/13

Fomuso Ekellem

DGL

- Grundlage
- Klassifikation
- Anwendung von lin. Ggln. M. konst. Koeffizienten

Näcshte Woche

- Lösung der lin. Dgln. M. konst. Koeffizienten auch mit Laplacetransformation
- Nümerische Lösungsverfahren für Dgln. 1. Ordnungen(z.B Runge-Kutta)

Grundlage

- Als Differentialgleichungen bezeichnet man Gleichungen, die außer einer Funktion auch deren Ableitung enthalten.
- Wir sind gewohnt, Funktionen mit f(x) zu bezeichnen. Bei Differentialgleichungen heißen Funktionen allgemein immer y(x) (höchstens einmal x(t), y(t)).
- Warum?
- Nun, man kann sich im Zusammenhang mit Differentialgleichungen vieles im x; y-Koordinatensystem veranschaulichen. Oft ist es dabei sinnvoll, sich Funktionswerte y(x) als Werte auf der y-Achse vorzustellen.
- Es existiert eine Vielzahl von Methoden, die jeweils für eine bestimmte Klassen von DGLs entwickelt wurden -> Nachzuschlagen in den gängigen Werken (bspw. Merziger (2004) oder Bronstein et al. (2001): *Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main)*
- Viele DGLs lassen sich nur numerisch lösen -> keine exakt-analytischen Lösungen, nur Näherungslösungen mit numerischen Integrationsverfahren (Einschrittverfahren, insb. Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung (RK4), oder Mehrschrittverfahren)

Problemlösung mit DGL

- In der Analysis verwendet man Taylorreihen, um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen

- Taylor-Formel, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch die sogenannten Taylor-Polynome anzunähern.
- Bei Taylorverfahren, werden die Ableitungen von f benötigt.

- Verfahren, die ohne explizite Kenntnis der **Ableitungen** von f auskommen, werden in der Praxis bevorzugt, weil geschlossene Ausdrücke für die Ableitungen von f oft nicht vorliegen und geeignete Approximationen (z.B. durch Differenzenquotienten) aufwendig zu bestimmen sind.
- Die meistverwendeten Verfahren sind die DGL , die sog. Runge-Kutta-Verfahren
- Bevor wir die Runge-Kutta Verfahren ansehen, wiederholen wir ein Paar verfahren der DGL…

Klassikation

Siehe Klassifikationsdatei

- Gewöhnliche/Partielle
- Linear/Nicht Linear
- Homogen/nicht/homogen
- Konst. Koeffizienten/Variable Koeffizienten

Weiter…

- Ordnung
- Trennbare/Nicht trennbare Variablen
- Explizit/Implizit…

- Lösungsansätze

Ordnung von DGL

- Die Ordnung einer Differentialgleichung eine wesentliche Kennzeichnung. Die Ordnung einer Differentialgleichung wird beschrieben durch die höchste Ableitung, die in der Differentialgleichung vorkommt.
- Z.B
  - So ist $y''' - 3y'' + 3y' - 1 = \sin x$ eine gewöhnliche, lineare, nicht homogene Differentialgleichung 3-ter Ordnung. 3-ter Ordnung weil y''' die höchste Ableitung ist .

Trennbare/Nicht trennbare Variablen

- Gilt nur für Gewöhnliche DGL 1.Ordnung. DGL der Form

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \quad oder \quad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

Methode der Trennung der Variablen

1. Man trennt die Variablen durch Umstellung von und erhält $h(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Unbestimmte Integration $\int h(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$ liefert die implizite Darstellung $H(y) = G(x) + C$ der allgemeinen Lösung, wobei $H(y)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $h(y)$ und $g(x)$ sind.
3. Wenn es möglich ist, wird die implizite Darstellung der allgemeinen Lösung nach y aufgelöst.

Explizit/Implizit…

- **Explizit heißt höchste Ableitung der DGL auf einer Seite haben.**
- **Z.B**

$$y''' = y'' + y' - 6y$$

Gegeben : homogene DGL

- **Lösen über Ansatz**

$$\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = 0, \qquad y(0) = y_0$$

Der Ansatz $y(x) = K \cdot e^{-\beta x}$ löst obige DGL – zur Bestätigung Ausprobieren! Allerdings löst dieser Ansatz nur diese DGL, er ist nicht geeignet für andere DGL! Beispielsweise ist der Ansatz $y(x) = K \cdot e^{-\beta x}$ für die DGL $\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta \cdot y = 0$ falsch, da $\frac{d^2}{dx^2}(K \cdot e^{-\beta x}) + \beta \cdot K \cdot e^{-\beta x} = K \cdot \beta^2 \cdot e^{-\beta x} + \beta \cdot K \cdot e^{-\beta x} \neq 0$.

Nun also bekannter Ansatz für obige DGL: $y(x) = K \cdot e^{-\beta x}$

Bestimmung von K durch Einsetzen von $y(0) = y_0$.

Lösung: $y(x) = y_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$

Gegeben : homogene DGL **Beispiele**

- **Aufgaben**

a) $y' + 4y = 0$ b) $y' + 2y = 0$ c) $-3y' = 8y$ d) $ay' - by = 0$

- **Lösungen**

a) $y = C \cdot e^{-4x}$ b) $y = C \cdot e^{-2x}$ c) $y = C \cdot e^{-\frac{8}{3}x}$ d) $y = C \cdot e^{\frac{b}{a}x}$

Gegeben : homogene DGL

- **Lösen über Ansatz**

$$\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = 0, \qquad y(0) = y_0$$

Eine andere Möglichkeit, schnell DGL zu lösen, ist das Lösen durch Trennung der Variablen. Man sortiert hierbei nach auftretenden Variablen und löst das Problem durch Integration. Manchmal lassen sich die Variablen aber nicht voneinander lösen. Dann müssen andere Wege beschritten werden (die hier nicht weiter erläutert werden.).

$$\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\beta \cdot y \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} \cdot dy = -\beta \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{y} \cdot dy = \int_0^x -\beta \cdot dx$$

$$\Rightarrow \ln(y(x)) - \ln(y(0)) = -\beta \cdot x \;\Rightarrow\; \ln \frac{y(x)}{y(0)} = -\beta \cdot x$$

$$\Rightarrow \frac{y(x)}{y(0)} = e^{-\beta \cdot x} \;\Rightarrow\; y(x) = y_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Wie man sieht, bekommt man auf beide Arten (glücklicherweise) dasselbe Ergebnis.

Gegeben : inhomogene DGL

- **Lösen über Ansatz**

$$\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = \mu \, , \; y(0) = y_0$$

Die Lösung einer inhomogenen DGL setzt sich aus der Lösung der homogenen DGL und einer speziellen Lösung zusammen.

a) Lösen der homogenen DGL $\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = K \cdot e^{-\beta x}$ (Achtung: Das K wird hier noch nicht bestimmt!)

b) Bestimmen einer speziellen (partikulären) Lösung $y_p(x) = \frac{\mu}{\beta}$ (Diese Partikulärlösung erfüllt ebenfalls die gegebene DGL -> Ausprobieren!)

c) Gesamtlösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = K \cdot e^{-\beta x} + \frac{\mu}{\beta}$

Bestimmung von K durch Einsetzen von $y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad K = y_0 - \frac{\mu}{\beta}$.

Lösung: $y(x) = (y_0 - \frac{\mu}{\beta}) \cdot e^{-\beta x} + \frac{\mu}{\beta}$

Gegeben : inhomogene DGL **Beispiele**

- **Aufgaben**

Lösen Sie die folgenden inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Aufsuchen einer partikulären Lösung

a) $y' = 2x - y$ b) $y' + 2y = 4 \cdot e^{5x}$ c) $y' + y = e^{-x}$

d) $y' - 4y = 5 \cdot \sin x$ e) $y' - 5y = \cos x + 4 \cdot \sin x$

- **Lösungen**

a) $y = C \cdot e^{-x} + 2x - 2$ b) $y = C \cdot e^{-2x} + \frac{4}{7} \cdot e^{5x}$ c) $y = C \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}$

d) $y_h = C \cdot e^{4x}$ $y_p = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$ $C_1 = -\frac{20}{17}$ $C_2 = -\frac{5}{17}$

e) $y_h = C \cdot e^{5x}$ $y_p = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$ $C_1 = -\frac{19}{26}$ $C_2 = -\frac{9}{26}$

Gegeben : inhomogene DGL

- **Lösen über Ansatz**

$$\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = \mu \;,\;\; y(0) = y_0$$

Will man sich das Finden der Partikulärlösung (und das Merken dieses Lösungsweges) ersparen, kann man die inhomogene DGL auch in eine homogene DGL transformieren.

Umstellen der DGL liefert: $\frac{dy}{dx} + \beta \cdot y = \mu \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \beta \cdot y - \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \beta \cdot (y - \frac{\mu}{\beta}) = 0$

Die Konstante $-\frac{\mu}{\beta}$ kann in das Argument der Ableitung hineingezogen werden, da

$\frac{d(y - \frac{\mu}{\beta})}{dx} = \frac{d(y)}{dx}$, da $\frac{d(-\frac{\mu}{\beta})}{dx} = 0$, also kann die DGL geschrieben werden als:

$\frac{d(y - \frac{\mu}{\beta})}{dx} + \beta \cdot (y - \frac{\mu}{\beta}) = 0$, was wiederum einer DGL der Form $\frac{dz}{dx} + \beta \cdot z = 0$ entspricht.

Gegeben : inhomogene DGL weiter…

Diese DGL wird nun wie unter A1 oder A2 gelöst. (Wichtig: Wir suchen eine Lösung für y, also muß $z = y - \frac{\mu}{\beta}$ wieder zum Schluß wieder benutzt werden! Die Lösung zu $\frac{dz}{dx} + \beta \cdot z = 0$ ist $z(x) = K \cdot e^{-\beta x}$, mit $z = y - \frac{\mu}{\beta}$ folgt also: $z(x) = y(x) - \frac{\mu}{\beta} = K \cdot e^{-\beta x} \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{-\beta x} + \frac{\mu}{\beta}$. Die Bestimmung von K erfolgt mit Hilfe von $y(0) = y_0$, also $K = y_0 - \frac{\mu}{\beta}$, so daß die Gesamtlösung wie bei Weg B1 lautet: $y(x) = (y_0 - \frac{\mu}{\beta}) \cdot e^{-\beta x} + \frac{\mu}{\beta}$.)

Gegeben : homogene 2. Ordnung DGL
nicht Klausur relevant.

- **Lösen über Ansätze**

  $ay'' + by' + cy = 0$

- **In quadratische Gleichung umformen,** $ak^2 + bk^1 + ck^0 = 0$ => $ak^2 + bk + c = 0$ **und lösen mit**

  $$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- **3 mögliche Ansätze**
  - 2 unterschiedliche reelle Lösungen => $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
  - 2 gleiche reelle Lösungen => $y = (C_1 x + C_2) e^{kx}$
  - Konjugiert-komplexer Paar => $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$

Weitere Beispiele DGL

Lösen Sie die folgenden Dgl. 1. Ordnung und geben Sie das angewendete Lösungsverfahren an

a) $y' = y$ b) $y' = 4x$ c) $y' = 4x - y$

d) $y' - xy = 0$ e) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ f) $y' = \frac{x+5y}{x}$

Weitere Beispiele DGL

a) Trennung der Variablen $y = C \cdot e^{x}$

b) Trennung der Variablen $y = 2x^2 + C$

c) Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$y_h = C \cdot e^{-x} \qquad y_p = C_1 \cdot x + C_2 \qquad C_1 = 4 \quad C_2 = -4$$

d) Trennung der Variablen $y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

e) Variation der Konstanten $y = \frac{1}{x} \cdot \left(-x\cos x + \sin x + C\right)$

f) Variation der Konstanten $y = -\frac{1}{4}x + C \cdot x^5$

Wissensfragen!

Allgemeine Wissensfragen

a) Was verstehen Sie allgemein unter dem Begriff "gewöhnliche Differentialgleichung"?

b) Was verstehen Sie unter der Ordnung einer gewöhnlichen Dgl?

c) Was ist das Ziel bei der Lösung einer Dgl.?

d) Erklären Sie den Unterschied zwischen einer homogenen und einer inhomogenen Dgl.

e) Worin besteht der Unterschied zwischen der impliziten und der expliziten Darstellung einer Dgl.?

f) Welche Vorgehensweisen kennen Sie für die Lösung von Dgln. 1. Ordnung?

Numerische Lösung…

- **Runge Kutta Nächste Woche**