Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu mathematischen Rechnens

WS 2012/13

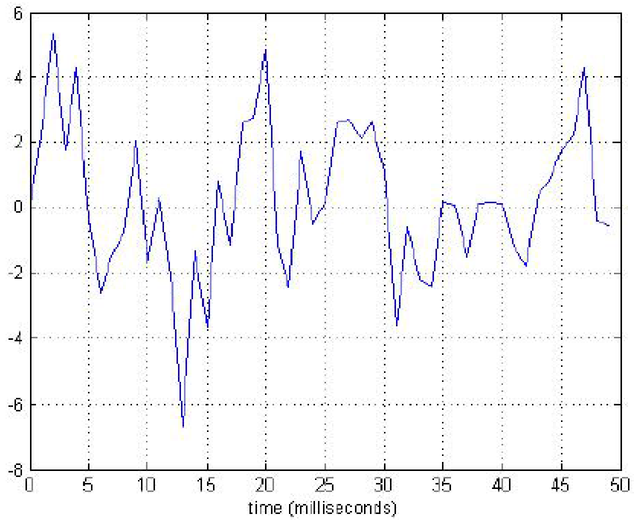
Fomuso Ekellem

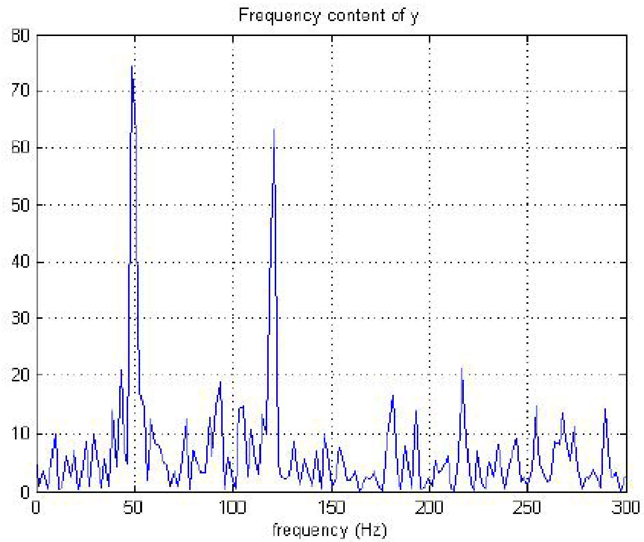
Inhalt

- **Fourier Transformation**
- **Beispiele**

Bereichvergleich

- **Zeitbereich und Frequenzbereich Vergleich: In der Zeitbereich können wir mit den Geräuschen gar nicht anfangen, aber in der Frequenzbereich, erkennen wir die Geräusche werden bei 50Hz und 120Hz erzeugt, und es gibt auch weitere Geräusche.**





Fourier Transformation

- **Definition:**

  Die Fourier-Transformation erlaubt es ein Zeitsignal einer aperiodischen Funktion f(x) in ein Spektrum *F(w) zu zerlegen. Dabei gibt f(x) den Zeitbereich an und F(w) den* Frequenzbereich. Demnach kann angenommen werden, dass x = Zeit ist und *w= Frequenz.*
- **Die Fourier Transformation sieht wie folgt aus:**

  Sei $f \in L^1(R)$. Dann gilt für alle $x, w \in R$

  $$F_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$ **bezeichnet die Fourier Transformation von f.**

  Ist $f \in L^1(R^n)$ mit $n \geq 1$ gilt: $$F_f(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i<x,\omega>} dx.$$

  Dabei stellt <x,w> das Skalarprodukt dar.
- **Die Fourier-Transformation ist also eine Abbildung der Form: *f(x)->F(w, x)..***

Fourier Transformation

- e^{-twx} ***beziehungsweise*** $e^{-t<w,x>}$ ***stellen den Integrationskern der Fourier-Transformation*** **dar.**
- **Eigenschaften:**
  - F(w) ist linear

$$F_{af+bg}(w) = aF_f(w) + bF_g(w)$$

  - F(w) ist beschränkt:

$$|F_f(w)| \leq \|f\|_1$$

  - Für die komplex konjugierte Fourier Transformation gilt

$$\overline{F_f(\omega)} = F_f(-\omega)$$

mit

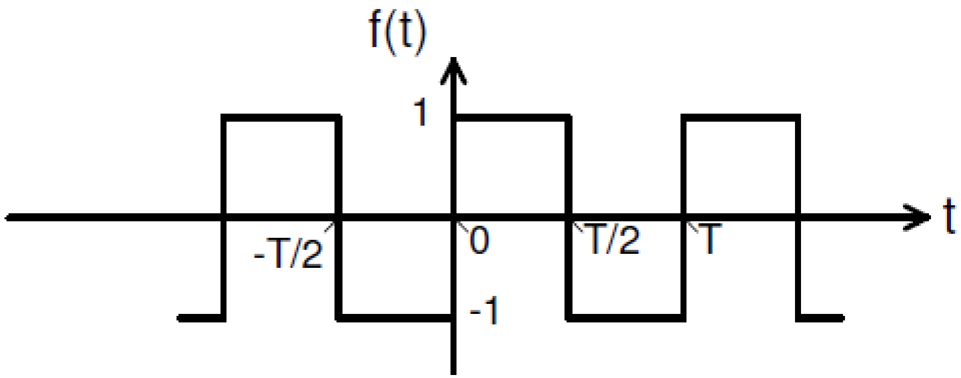
Fourier Transformation

- **Skizzieren Sie**

$$f(t)=\begin{cases}-1 & ;-\frac{T}{2}<t<0\\ +1 & ;0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

Fourier Transformation

- **Beispiel Skizzen**



$$f(t) = \begin{cases} -1 & ; -\frac{T}{2} < t < 0 \\ +1 & ; 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

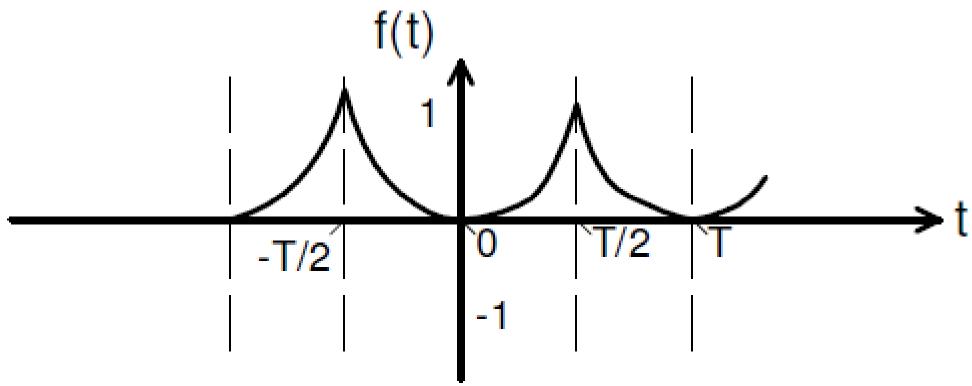
Fourier Transformation

- **Skizzieren Sie**

$$f(t)=\left(\frac{2t}{T}\right)^2 \quad ; -\frac{T}{2} \le t < \frac{T}{2}$$

Fourier Transformation

- **Beispiel Skizzen**



$$f(t) = \left(\frac{2t}{T}\right)^2 \quad ; -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$$

Fourier Transformation

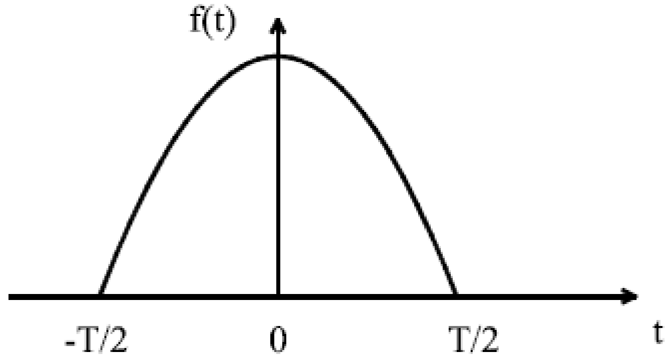
- **Skizzieren Sie**

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & ; -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & ; sonst \end{cases} \quad mit\ \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

Fourier Transformation

- **Beispiel Skizzen**

$$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t) & ; -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & ; sonst \end{cases} \quad mit\ \omega_0 = \frac{\pi}{T}$$



Fourier Transformation

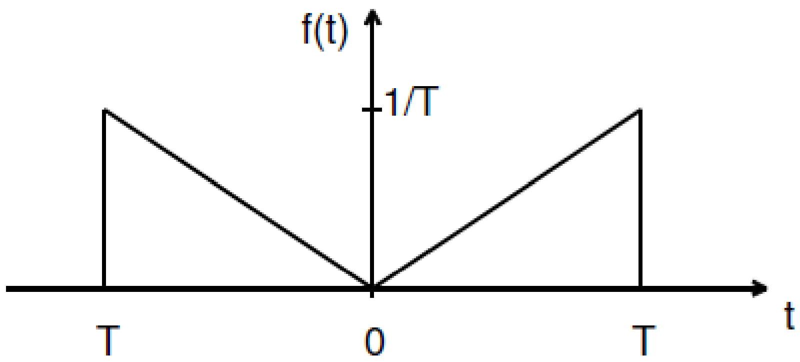
- **Skizzieren Sie**

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{|t|}{T^2} & ;-T \le t \le T \\ 0 & ;sonst \end{cases}$$

Fourier Transformation

- **Beispiel Skizzen**

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{|t|}{T^2} & ;-T \leq t \leq T \\ 0 & ;sonst \end{cases}$$



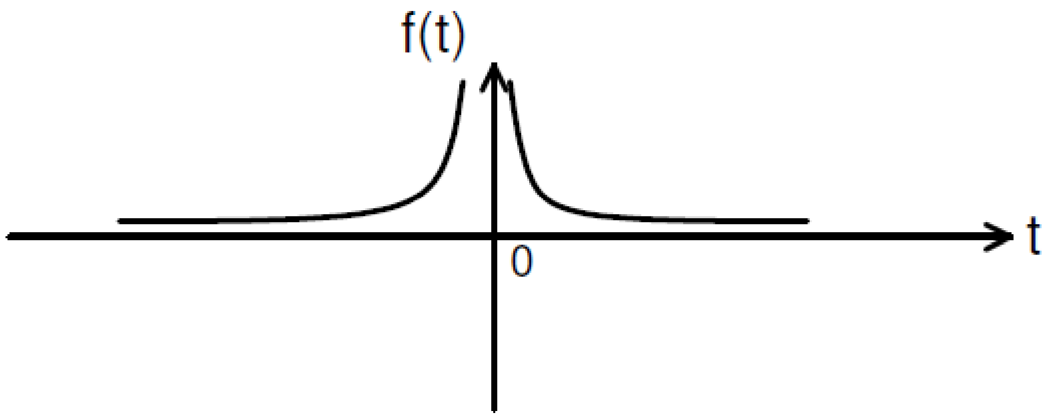
Fourier Transformation

- **Skizzieren Sie**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t \geq 0 \\ e^{t} & ; t < 0 \end{cases}$$

Fourier Transformation

- **Beispiel Skizzen**



$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t \geq 0 \\ e^{t} & ; t < 0 \end{cases}$$

Fourier Transformation

- **Beispiele:**

Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende Zeitfunktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad t < 0 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ und das Betragsspektrum $|F(\omega)|$.

Fourier Transformation

- **Lösung 1**
- **a.) ist Übung 3**

b) $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t}\, dt = \frac{\tau}{1+j\omega\tau}$$

$$\left|F(\omega)\right| = \left|\frac{\tau}{1+j\omega\tau}\right| = \left|\frac{(1-j\omega\tau)\tau}{1+(\omega\tau)^2}\right| = \frac{\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

Fourier Transformation

- **Aufgabe 2**

Gegeben ist die Funktion $f(t) = e^{-a|t|}$, mit $a \in \mathbf{R}_+$.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$.
b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$.

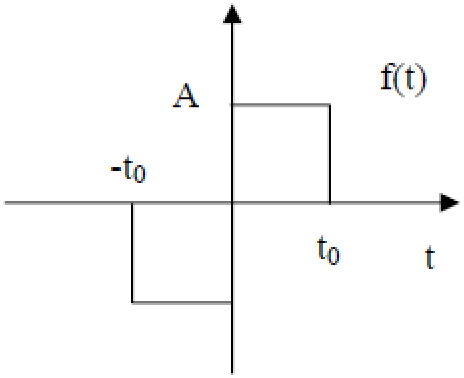
Fourier Transformation

- **Lösung 2**
- **a.) ist Übung 3**

b) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a-j\omega}+\frac{1}{a+j\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Fourier Transformation

- **Aufgabe 3**



a) Ermitteln Sie aus der Skizze die Gleichung von $f(t)$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$.

Fourier Transformation

- **Lösung *3***

$$\text{a)}\quad f(t)=\begin{cases}-A & & -t_0<t<0\\ A & \text{für} & 0<t<t_0\\ 0 & & |t|>t_0\end{cases}$$

$$\text{b)}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=-\int_{-t_0}^{0} Ae^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{t_0} Ae^{-j\omega t}dt=\frac{A}{j\omega}(1-e^{j\omega t_0})-\frac{A}{j\omega}(e^{-j\omega t_0}-1)$$

$$=j\frac{2A}{\omega}(\cos(\omega t_0)-1)$$

Fourier Transformation

- **Aufgabe 4**

Gegeben ist die folgende Zeitfunktion

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t+T}{T} & -T \le t \le 0 \\ \dfrac{-t+T}{T} \quad \text{für} & 0 < t \le T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(\omega)$ und das Betragsspektrum $|F(\omega)|$ von $f(t)$.

c) Die spektrale Energiedichte ist gegeben durch $e(\omega) = 2|F(\omega)|^2$. Berechnen Sie $e(\omega)$.

Fourier Transformation

- **Lösung 4**
- **a.) In der Vorlesung gemacht**

$$\text{b)}\quad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-T}^{0}\frac{t+T}{T}e^{-j\omega t}\,dt+\int_{0}^{T}\frac{T-t}{T}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\int_{-T}^{0}\frac{t+T}{T}e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{T}\left[-\frac{1}{j\omega}Te^{j\omega T}-\frac{1}{(j\omega)^2}\left(1-e^{j\omega T}\right)\right]-\frac{1}{j\omega}(1-e^{j\omega T})$$

$$\int_{0}^{T}\frac{T-t}{T}e^{-j\omega t}\,dt=\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega T}+\frac{1}{T}\frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{-j\omega T}-1\right)-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-j\omega T}-1\right)$$

- **Daraus folgt** $$F(\omega)=\frac{2}{T\omega^2}\left(1-\cos\omega T\right)=\left|F(\omega)\right|$$

$$\text{c)}\quad e(\omega)=2\left|F(\omega)\right|^2=\frac{8}{T^2\omega^4}\left(1-\cos\omega T\right)^2$$

Fourier Transformation

- **Aufgabe 5**

Gegeben ist die Funktion

$$rect(at) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |t| \le \dfrac{1}{2a} \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad |t| > \dfrac{1}{2a} \end{cases}, \quad \text{mit } a \in \mathbf{R}_+$$

a) Zeichnen Sie $rect(at)$ für $a = 0.5$, $a = 1$ und $a = 2$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $rect(0.5 \cdot t)$, $rect(t)$, $rect(2t)$.

c) Skizzieren Sie die Fouriertransformierten aus b).

Fourier Transformation

- **Lösung 5**

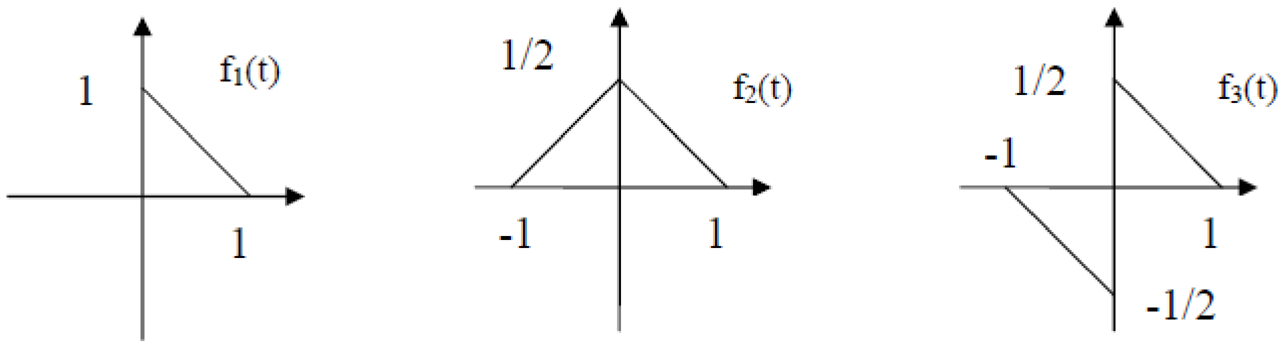
- **a.) offen**

b) $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} rect(at)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{j\omega}\left(e^{-\frac{j\omega}{2a}}-e^{\frac{j\omega}{2a}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2a}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

Fourier Transformation

- **Aufgabe 6**

Gegeben sind die folgenden 3 Funktionen:



a) Stellen Sie die Gleichungen der Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ auf!

b) Berechnen Sie den geraden und den ungeraden Anteil von $f_1(t)$.

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten $F_1(\omega)$, $F_2(\omega)$, $F_3(\omega)$!

Fourier Transformation

- **Lösung 6**

a) $$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 - t & \text{für} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{für} \quad t > 1 \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < -1 \\ \frac{1}{2}(t+1) & \text{für} \quad -1 \le t < 0 \\ -\frac{1}{2}(t-1) & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{für} \quad t \ge 1 \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < -1 \\ -\frac{1}{2}(t+1) & \text{für} \quad -1 \le t < 0 \\ \frac{1}{2}(1-t) & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{für} \quad t \ge 1 \end{cases}$$

Fourier Transformation

- **Lösung 6 weiter**

b) Bei $f_2(t)$ handelt es sich um den geraden Anteil von $f_1(t)$. $f_3(t)$ ist der ungerade Anteil von $f_1(t)$.

c) $$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^1 (1-t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^1 e^{-j\omega t}\,dt - \int_0^1 te^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{\omega^2}\left(1 - e^{-j\omega}\right)$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (t+1)e^{-j\omega t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 (-t+1)e^{-j\omega t}\,dt$$