

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu
wissenschaftlichen Rechnens mit C++ und Matlab

SS2013

Fomuso Ekellem



Inhalt

Bis jetzt : Die grundlegende Aspekte unsere Vorlesung

- Folgen
- Reihen
- L'hospitalsche Regel (für Grenzwert Untersuchung)
- Vollständige Induktion als Beweis Methode
- Partialbruchzerlegung um komplizierte Brüche zu vereinfachen
- Integralrechnung(Tricks)

Heute

- **Klassifikation von Folgen und Reihen**
- **Konvergenz Kriterien von Reihen:**
 - Triviale Kriterium
 - Quotientenkriterium
 - Wurzelkriterium
 - Leibnizkriterium
 - Minoranten und Majoranten Kriterien



Klassifikation von Folgen und Reihen

Geometrische Folgen und Reihen

- Eine Folge heißt geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.
- Anders ausgedrückt:
Eine Folge heißt geometrisch, wenn jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Konstanten, dem Quotienten, hervorgeht.
- Ist a das Anfangsglied und q der konstante Quotient, so heißt die Folge

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, \dots, aq^{n-1} \quad \text{oder} \quad a_i = aq^{i-1}$$
$$i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$$

- Die Variablen a und q stehen für reelle Zahlen. Damit man immer einen Quotienten bilden kann, dürfen a und q nicht gleich Null sein.
- Ist $q=1$, so sind alle Glieder gleich a . Dagegen ist nichts einzuwenden. Es ist aber zweckmäßig, $q=1$ trotzdem nicht zuzulassen, da unten in Formeln $q-1$ im Nenner steht.



Klassifikation von Folgen und Reihen

Geometrische Folge weiter...

- Für $q < 0$ ist die geometrische Folge alternierend.

Geometrische Reihen

- Zu einer Folge gibt es als Erweiterung die Folge der Partialsummen. D.h., zur Folge a_n gibt es die Reihe $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$.
- Für die geometrische Folge ist es die Reihe $s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$.
Die Summe fasst man zusammen zu $s_n = a(1-q^n)/(1-q)$.
Herleitung
$$s_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$
$$qs_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$
- Die linken und rechten Terme subtrahiert man und erhält $s_n - qs_n = a - aq^n$ oder $s_n = a(1-q^n)/(1-q)$, wzbw..
- Ist $q > 1$, schreibt man besser $s_n = a(q^n - 1)/(q - 1)$.



Klassifikation von Folgen und Reihen

Anwendungsbeispiel von Geometrische Reihen:

- Eine Linie ist in sechs Teile geteilt, und bildet eine geometrische Folge. Wenn die kürzeste Länge ist 3cm ist und die längste 96cm ist, finden die Länge der ganzen Linie.



Klassifikation von Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen und Reihen:

- Die arithmetischen Folgen und Reihen können wie die geometrischen beschrieben werden. Man muss jedoch nicht von konstanten Quotienten, sondern von **konstanten Differenzen** ausgehen. Das macht den Sachverhalt einfacher.
- Anders ausgedrückt:
Eine Folge heißt arithmetisch, wenn jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition einer Konstanten, der Differenz, hervorgeht.
- Ist a das Anfangsglied und d die konstante Differenz, so ist die Folge $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, a+(n-1)d$ oder $a_i = a + (i-1)d, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$
- Die Variablen a und d stehen für reelle Zahlen. Eine rekursive Darstellung der arithmetischen Folge ist $a_1 = a$ und $a_i = a_{i-1} + d, \quad i = 2, 3, \dots, n.$
- Vielleicht ist der folgende Satz der Grund für den Namen arithmetische Folge.
Satz: Jedes Glied einer arithmetischen Folge ist das arithmetische Mittel der beiden Nachbarglieder. Herleitung: $a_{i-1} + a_{i+1} = [a + (i-2)d + a + nd] = a + nd - 2d + a + nd = 2[a + (i-1)d] = 2a_i$ oder $a_i = (1/2)(a_{i-1} + a_{i+1})$, wzbw..
Zu ergänzen ist noch $1 < i < n+1$.



Klassifikation von Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen und Reihen:

Zur arithmetrischen Folge gibt es die Reihe

$$s_n = a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] + \dots + [a+(n-1)d].$$

Diese Summe fasst man zusammen zu $s_n = (1/2)n(a+a_n)$ oder ausführlich zu

$$s_n = an + (1/2)d^2n - (1/2)dn.$$

Herleitung

Man kann schreiben

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a + [a+d] + [a+2d] + \dots + [a_n - 2d] + [a_n - d] + a_n \text{ oder}$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 = a_n + [a_n - d] + [a_n - 2d] + \dots + [a + 2d] + [a + d] + a$$



Klassifikation von Folgen und Reihen

Arithmetische Folgen und Reihen:

Beispiel:

- Ein Skriptum mit 500 Seiten ist 52 mm dick, wobei der Einband das Skriptum 2mm dicker macht. Berechnen Sie, wie dick ein Skriptum mit 320 Seiten bzw. mit 780 Seiten ist



Klassifikation von Folgen und Reihen

(1/n) harmonische Folge und Reihen

- Die harmonische Folge ist die mathematische Zahlenfolge der Kehrwerte der positiven ganzen Zahlen, also die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ a_0
- Die harmonische Folge konvergiert gegen Null: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$



Konvergenzkriterien für Reihen

- **Trivialkriterium**
- **Quotientenkriterium**
- **Wurzelkriterium**
- **Leibnizkriterium**
- **Minoranten und Majoranten Kriterien**
- **Siehe skript...**