Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu mathematischen Rechnens

WS 2012/13

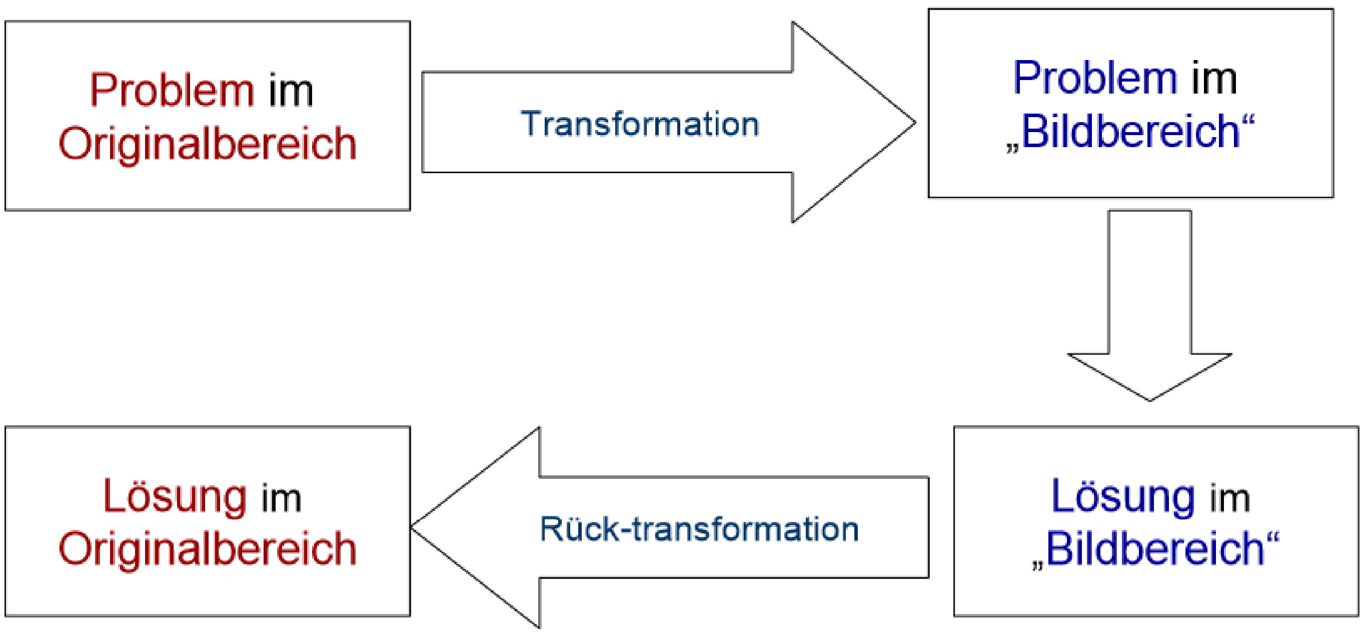
Fomuso Ekellem

Inhalt

- **Laplace Transformation**
- **Rücktransformation von Laplace Transformation(Inverse)**

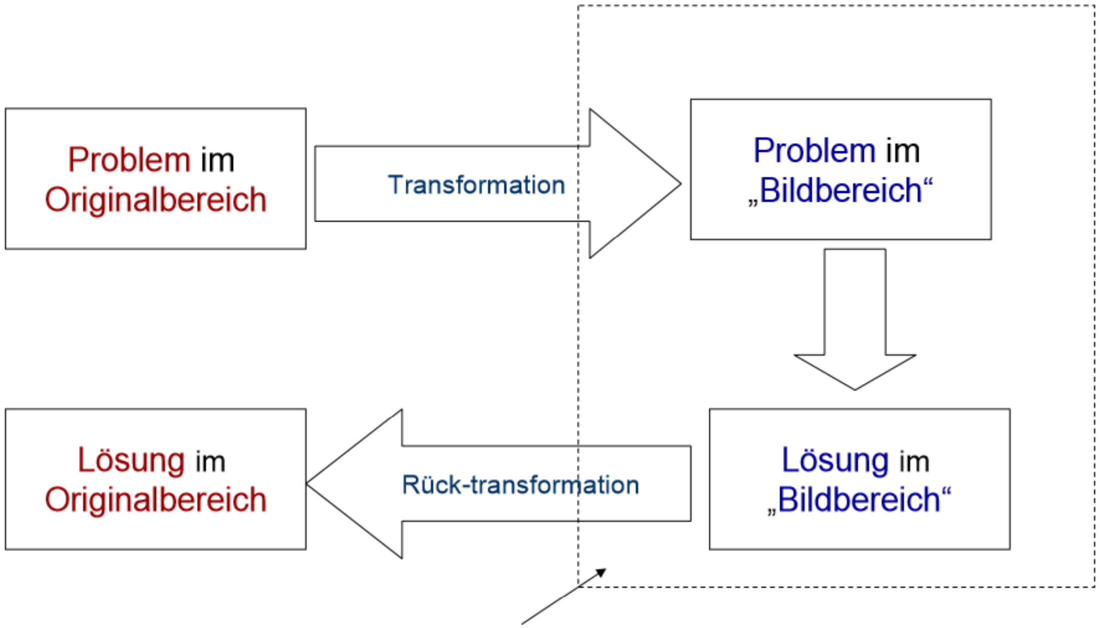
Laplace Transformation

Was ist eine Transformation?



Laplace Transformation

Warum macht man eine Transformation?



Weil die Lösung (Untersuchung) eines Problems in einem anderen Bereich (Bildbereich) manchmal sehr viel einfacher als im Originalbereich ist.

Laplace Transformation

- Weil die Untersuchung eines Problems in dem Bildbereich sehr viel einfacher als im Originalbereich ist, oder
- Weil die Untersuchung des Problems im Originalbereich nicht möglich ist.

- **Formel für Laplace Transformation**

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$F(s) = L\big(f(t)\big)$ die Laplace–Transformation von $f(t)$

$f(t) = L^{-1}\big(F(s)\big)$ die inverse Laplace–Transformation von $F(s)$

Laplace Transformation

Wichtige sei Eigenschaften: $F(s) = L(f(t))$ und $G(s) = L(g(t))$

- **Linearität:** $L(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$
- **Ableitung:** $L(\dot{f}(t)) = sF(s) - f(0)$

  $L(\ddot{f}(t)) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0)$

  $\vdots$
- **Integral:** $F\left(\int_0^\infty f(t)dt\right) = \frac{1}{s}F(s)$
- **Verschiebung:** $L(e^{-at}f(t)) = F(s+a)$ $\quad a \in C$
- **Faltung:** $F(f * g) = F(s)G(s)$
- **Streckungssatz:** $L\{f(a\,t)\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

Laplace Transformation

- **Eine einfache Korrespondenztabelle**

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$

Laplace Transformation-rote Pfad in Mathe III

- **DGL Lösen weiter…: Manchmal ist es praktisch, eine Differentialgleichung in ein anderes Problem zu transformieren, das wir leichter lösen können und dann zurück transformieren. So kann man mit Probleme umgehen, die keine Lösungsansatz haben.**
- **Die Laplace Transformation erweist sich als nützlich zur Lösung von linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten. Dabei werden die Anfangsbedingungen auch gleich mit berücksichtigt.**
- **Die Laplace–Transformation gehört zur Klasse der so genannten Integraltransformationen. Diese ordnen einer vorgegebenen Funktion *$f = f(t)$ in eindeutiger Weise eine transformierte* Funktion der Form**

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$ **zu. Wird auch so geschrieben:** $$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

- ***$K(s, t)$ heißt Kern der Integraltransformation.***
- ***α =0 oder* zumeist: *$\alpha = -\infty$ und/oder $\beta = +\infty$, d.h. das Integral in* ist ein uneigentliches Integral.**

Laplace Transformation

- **Beispiele für solche Integraltransformation sind:**

Fourier–Transformation: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt,$

Laplace–Transformation: $F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$

Mellin–Transformation: $F(s) = \int_{0}^{\infty} t^{s-1} f(t)\, dt,$

Hankel–Transformation: $F_\nu(s) = \int^{\infty} t\, J_\nu(st)\, f(t)\, dt.$

Satz : Ist $f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, so existiert $\mathcal{L}(f(t))$.

Laplace Transformation

- **Gegeben sei eine Funktion** ***f (t) für 0 ≤ t < ∞ (Originalfunktion)***

$$F(s) = \int_{\alpha 0}^{\infty} e^{-st} f(t).dt$$ ***(Bildfunktion)***   ***s ist ein (vorerst) reeller Parameter***

- ***Schreibweise: F(s) = L(f (t))***
- **Der Zusammenhang oben wird mitunter auch durch das so genannte Doetsch–Symbol** ***f(t) ◦—• F(s) ausgedrückt.***
- **Die praktische Anwendbarkeit solcher Transformationen beruht im Wesentlichen darauf, dass Differentialausdrücke in algebraische Ausdrücke transformiert werden, die meist einfacher zu behandeln sind.**
- **In den Ingenieurwissenschaften wird diese Technik häufig zur Lösung linearer Differentialgleichungen verwendet, in denen unstetige oder impulsartige Terme auftreten.**
- **Beispiele:**

[Hinweis: bitte hochgeladene Korrespondenzen Tabelle anschauen]

Rücktransformation
Laplace Transformation(Inverse)

- **Mittels Expand in Partialbrüche zerlegen**
- **Umformung**
- **Nachschalgen in Transformationstabelle**