Matrizen

- Matrizen-Operationen z.B. für Matrizen **A** und **B**
  - Addition

$$\boxed{A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

  - Rechengesetze

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} &= \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \\ \mathbf{A} + \mathbf{O} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

Matrizen

- Matrizen-Operationen
  - Subtraktion

$$\boxed{A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})}$$

  - Multiplikation

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}}$$

<u>Rechengesetze</u>

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$
$$(\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$
$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D}$$

  - Produkt von zwei Matrizen ist nur möglich, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. Also $nxm * mxz = nxz$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Matrizen

- Matrizen-Operationen
  - Beispiel Multiplikation

  A = 2x3 B = 3x2 A*B = 2x2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

① $1*1+(-1)* \quad + 2*3 = 9$
② $1*3 + 0*(-2) + 4*3 = 15$
③ $1*(-4)+(-1)*2 + 2*5 = 4$
④ $(-4)*3 + 2*0 + 5*4 = 8$

Wichtig!

- Man kann nicht für jeder2 Matrizen A und B mit richtige Ordnungen immer beide Produkte A*B und B*A bilden (Linksmultiplikation und Rechtsmultiplikation). Nur wenn A = nxm und B = mxn sind oder wenn A und B quadratisch sind.

Matrizen

- Besonderheiten von Matrizen
  - Transponierte Matrizen: Aus Zeilen Spalten machen und umgekehrt.

Beispiel

$$\boxed{(a^t_{ij}) = (a_{ji})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Gesetzte:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(\lambda A)^T = (\lambda A)^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^T)^T = A$$

Matrizen

- Adjungierte –Matrix
  - Matrix muss quadratisch sein. Dann werden die Elemente durch ihre Adjunkte (Unterdeterminante) ersetzt.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad adj.A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Sei $A_{ik} = (-1)^{i+k}|\mathbf{S}_{ik}|$, wobei $\mathbf{S}_{ik}$ die Streichnungsmatrix ist.

Die Zahl A_{ik} heißt **Kofaktor** von a_{ik}. er Matrix zusammenfassen (**Kofaktorenmatrix**) und transponieren. Wir erhalten dadurch die adj.A ($\mathbf{A}^{*t}$)

Matrizen

- Adjungierte –Matrix
  - Beispiel Rechnung:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix} > \text{adj.}A=\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{2}=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 36 - 25 = 11$$

$$(-1)^{3}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = -(12-5) = -7$$

$$(-1)^{4}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2$$

$$(-1)^{3}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -(24-15) = -9$$

$$(-1)^{4}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9$$

$$(-1)^{5}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5-2) = -3$$

$$(-1)^{6}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$$

$$(-1)^{7}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(5-3) = -2$$

$$(-1)^{8}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Matrizen

- Matrizen –Determinante

  Determinante sind spezielle Funktionen, die quadratische Matrizen einen Skalar zuordnet. Für Matrizen mit hohen Ordnungen, ist die Rechnung äußerst Umfangreich. nxn Matrizen mit n>2.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2*1-(-2)*1=4$$

Matrizen

- Matrizen –Determinante für nxn Matrizen wo n>2 ist:

  Eine Determinante D lässt sich nach den Elementen einer beliebigen Zeile entwickeln.

$$D = (-1)^{i+j} a_{i1} * |A|_{i1} + (-1)^{i+j} a_{i2} * |A|_{i2} + \dots\dots\dots + (-1)^{i+j} a_{in} * |A|_{in}$$

A_{i2} bis A_{in}

Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1(4(-1)-5) + 3(2-15) + 7(-2-12) =$$

$$-4-5 + 3(-13) + 7(-14) =$$

$$-9 - 39 - 98 = 146$$

Matrizen

- Matrizen- Inverse

Falls für *Matrix* $\mathbf{A}$ *eine Matrix* $\mathbf{A}^{-1}$ *mit der Eigenschaft*

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}}$$

existiert, dann heißt $\mathbf{A}^{-1}$ *die* ***inverse Matrix*** *von* $\mathbf{A}$.

Berechnung

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}^{*t}}$$