Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu mathematischen Rechnens

WS 2012/13

Fomuso Ekellem

Inhalt

- **Potenzreihen (Quelle: Lubov Vassilevskaya)**
- **Taylorreihen**
- **DGL**

Potenzreihen

Die wichtigsten, in den Anwendungen auftretenden Funktionen lassen sich als Potenzreihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

den sog. Taylorreihen darstellen. Diese Entwicklung liefert eine Möglichkeit, um Funktionen wie z.B.

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \sqrt{x}, \quad \ln x$$

explizit zu berechnen, indem nur die Grundrechenoperationen (+, –, •, /) angewendet werden. Deswegen ist es für Anwendungen wichtig, dass für gegebene oder komplizierte Funktionen Näherungsformeln zur Verfügung stehen.

Potenzreihen

Ein Taschenrechner bietet neben den Grundrechenarten auch weitere Funktionen an, z.B. die Berechnung des Kosinus oder des Sinus. Die Bestimmung solcher Funktionswerte wird nicht exakt, sondern durch Näherungen auf genügend viele Dezimalstellen durchgeführt.

Definition:

Funktionenreihe wird eine Reihe genannt, deren Glieder Funktionen einer unabhängigen Variablen x sind:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

Partialsumme heißt die Summe der ersten n Glieder dieser Reihe:

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Potenzreihen

Die wichtigsten Funktionenreihen sind die Potenzreihen der Gestalt

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ a_n (x - x_0)^n + \ldots$$

wobei die Koeffizienten a_n und die Entwicklungsstelle x_0 konstante Zahlen sind.

Beispiele:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \qquad a_n = 1$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Potenzreihen

Bei einer Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

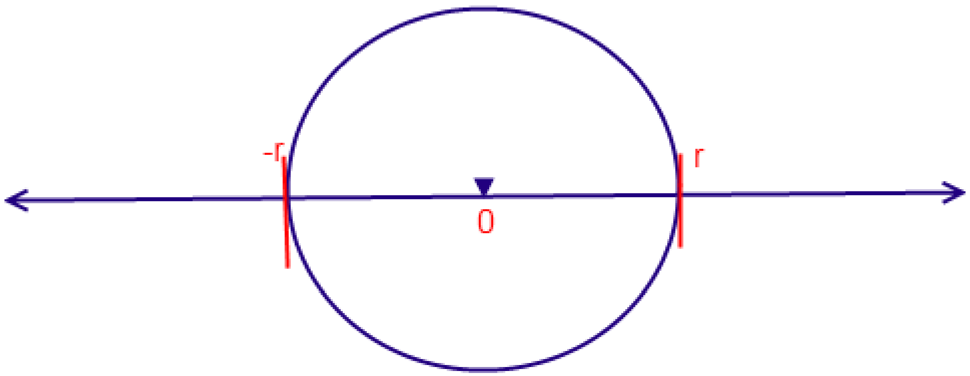
hängt der Wert eines jeden Gliedes und damit der Summenwert vom Wert der unabhängigen Variablen x ab.

Im Folgenden untersuchen wir das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe.

Definition:

Die Menge aller x-Werte, für die eine Potenzreihe konvergiert, heißt Konvergenzbereich der Potenzreihe.

Potenzreihen



Konvergenzbereich einer Potenzreihe

Für $x = 0$ konvergiert jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und besitzt dort den Summenwert $P(0) = a_0$. Es gibt Potenzreihen, die nur für $x = 0$ konvergieren und solche, die für alle x konvergieren.

Potenzreihen

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die nicht überall konvergiert,

gibt es eine positive Zahl r, Konvergenzradius genannt, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe konvergiert überall im Interval $|x| < r$.
2. Die Potenzreihe divergiert für $|x| > r$.
3. Man setzt $r = 0$, falls eine Potenzreihe nur an der Stelle $x = 0$ konvergiert.
4. Über das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $-r$ und r lassen sich keine allgemeingültigen Aussagen machen.

Der Konvergenzradius kann mittels $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ berechnet werden.

Potenzreihen

Wir bestimmen den Konvergenzradius r einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Nach dem Quotientenkriterium von d'Alembert konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn sie die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1$$

erfüllt.

$$b_n = a_n x^n, \qquad b_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r \qquad (alle \ \ a_n \neq 0)$$

Potenzreihen

- **Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen**

- **Aufgabe 1** $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- **Aufgabe 2** $$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$$

- **Aufgabe 3** $$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$$

Aufgabe 1 (Potenzreihen)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots$$

$$\boxed{r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|}$$

$$a_n = \frac{1}{n!}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Reihe konvergiert überall.

Aufgabe 2 (Potenzreihen)

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{3^n}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| = 3$$

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x = -3$ und $x = 3$.

$$x = 3: \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \to \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = 3$.

$$x = -3: \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} \quad \to \quad P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Die Reihe divergiert im Punkt $x = -3$.

Der Konvergenzbereich der Reihe ist $x \in (-3, \ 3)$

Aufgabe 3 (Potenzreihen)

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \ldots, \qquad a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\, 2^{n+1}}{n\, 2^n} \right| = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

Wir untersuchen das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x = -2$ und $x = 2$:

$$x = 2: \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \rightarrow \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Die harmonische Reihe divergiert.

$$x = -2: \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} \quad \rightarrow \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Diese alternierende harmonische Potenzreihe konvergiert.

Die Reihe konvergiert im Intervall $x \in [-2, 2)$.

Potenzreihen

Die geometrische Reihe: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Konvergenzradius: $r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| \geq 1$.

Die Reihe besitzt im Konvergenzbereich $-1 < x < 1$ den "Summenwert"

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad \Rightarrow$$

$$S - 1 = x + x^2 + x^3 + \ldots = x\,(1 + x + x^2 + \ldots) = x\,S$$

$$S - 1 = x\,S \quad \Rightarrow \quad (1 - x)\,S = 1 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1 - x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - x} \qquad (-1 < x < 1)$$

Im Interval $-1 < x < 1$ kann die Potenzreihe $P(x)$ als eine spezielle Darstellungsform der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = 1/(1-x)$ angesehen werden.

Potenzreihen

Taylorreihe

- Taylorreihe und Taylorpolynom
- In der Analysis verwendet man Taylorreihen, um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen
- Taylor-Formel, um Funktionen in der Umgebung eines Punktes durch die sogenannten Taylor-Polynome anzunähern.
- Taylorreihe = unendliche Summen
- Nachteil = können nicht in endlicher Zeit errechnet werden, deshalb
- T-Polynom = endliche Summen (Näherung)

Taylorreihe

- Instrument um Potenzreihen zu finden aus beliebiger Funktionen durch simples einsetzen
- näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

  Allg. Formel:

$$T_{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

- Unsere Formel: $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \ldots$
- Wozu noch? ->Integration von Funktionen, indem Potenzreihenentwicklung und anschließend gliedweise Integriert

Taylorreihe

- **Satz 1: f: I->R soll mindestens (N+1)mal stetig differenzierbar sein. x_0, x sind Teilmengen von I.**
- **Dann gilt:**

$$f(x)= f(\mathbf{x_0})+ f'(\mathbf{x_0})\cdot(x - \mathbf{x_0}) + \frac{f''(\mathbf{x_0})\cdot(x- \mathbf{x_0})^2}{2} + \frac{f'''(\mathbf{x_0})\cdot(x- \mathbf{x_0})^3}{3!} + \dots + \frac{f''(\mathbf{x_0})\cdot(x- \mathbf{x_0})^{\mathbf{n}}}{N!} + \mathbf{R}_{N+1}(\mathbf{x})$$

wobei es existiert ein z zwischen $\mathbf{x_0}$ **und x sodass**

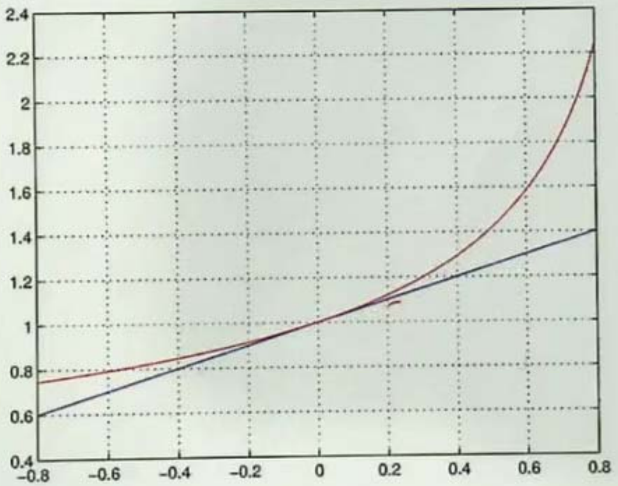
$$\mathbf{R}_{N+1}(\mathbf{x}) = \frac{f^{\mathbf{N+1}}(\mathbf{z})\cdot(x- \mathbf{x_0})^{\mathbf{N+1}}}{(N+1)!}$$

Taylorreihe

Taylorpolynome mit Entwicklungspunkt 0 für

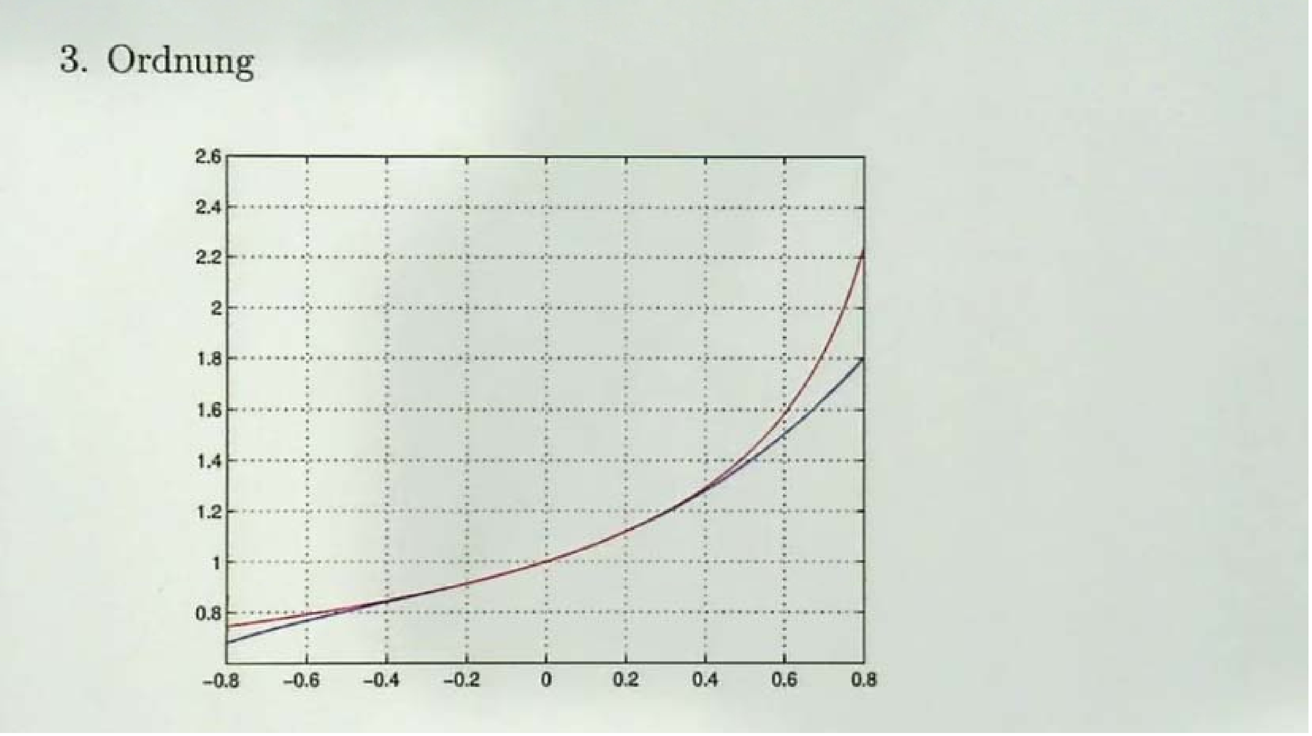
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad -0,8 \leq x \leq 0,8$$

1. Ordnung



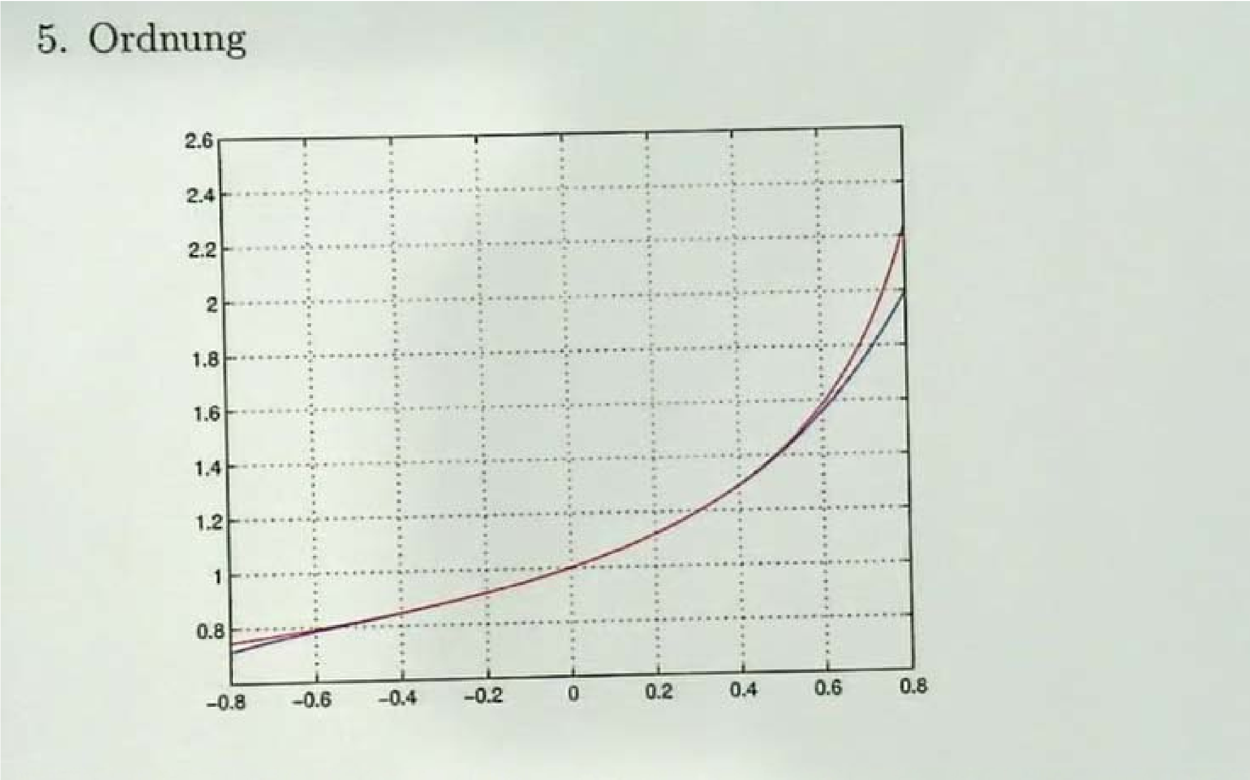
Taylorreihe

- **Rot = gleiche Funktion** **Blau = Polynom von Grad <= 3**



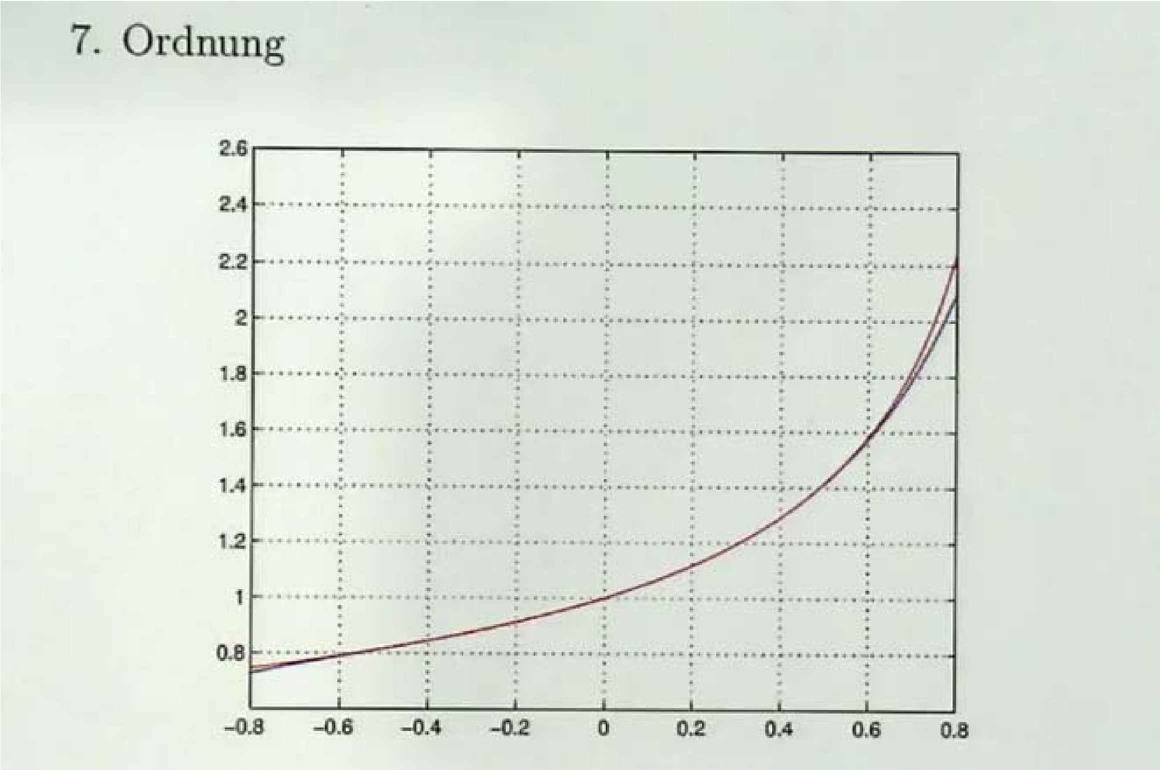
Taylorreihe

- **Rot = gleiche Funktion** **Blau = Polynom von Grad <= 5**



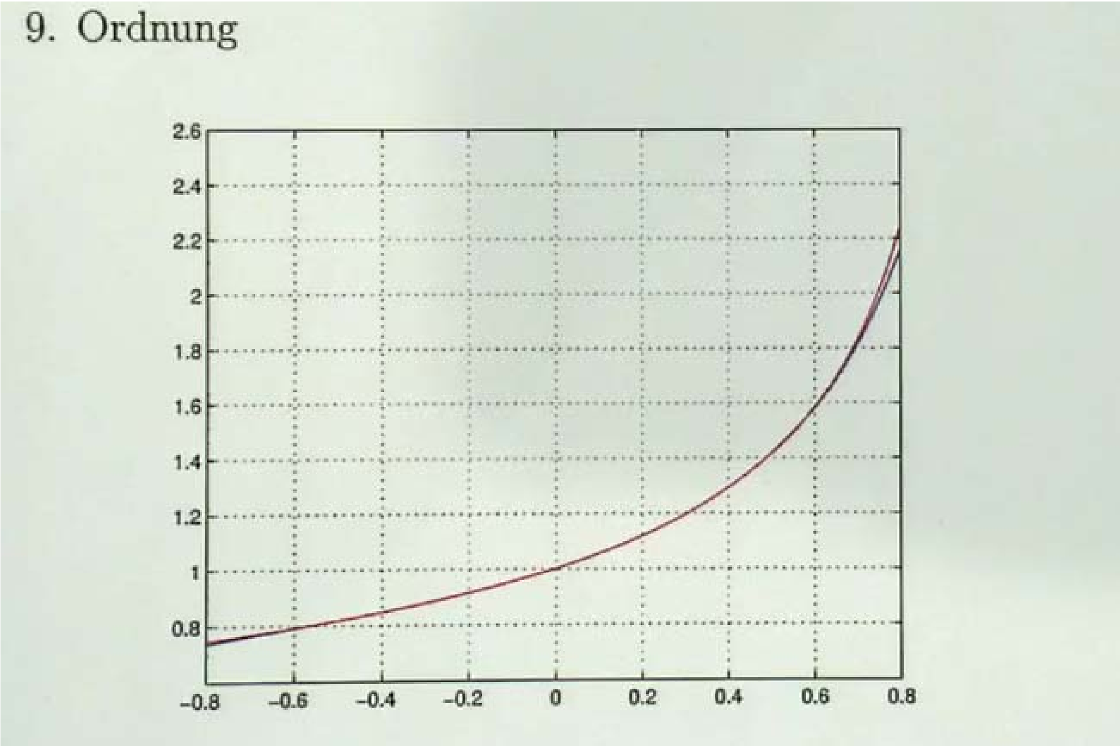
Taylorreihe

- **Rot = gleiche Funktion** **Blau = Polynom von Grad <= 7**



Taylorreihe

- Rot = gleiche Funktion Blau = Polynom von Grad <= 9



Taylorreihe

Taylorreihe einer Funktion:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 – Entwicklungszentrum oder Entwicklungspunkt

1. Für das Entwicklungszentrum 0 geht die Taylorsche Reihe in die Maclaurinsche Reihe über.

2. Der Konvergenzradius r der Taylorsche Reihe wird nach der Formel

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

bestimmt. Die Reihe konvergiert dann überall im Intervall

$$x_0 - r < x < x_0 + r$$

Taylorreihe

- **Aufgabe 1**

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe nach Potenzen von $x - 2$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

- **Aufgabe 2**

Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe um das Entwicklungszentrum - 1 und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

Aufgabe 1 (Taylorreihe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

Entwicklung einer Funktion in die Taylorreihe um die Stelle $x = 2$:

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \dots$$

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x + 5, \qquad f''(x) = 24x - 6, \qquad f'''(x) = 24$$

$$f^{(n)}(2) = 0 \qquad n \geqslant 4$$

$$f(x) = 29 + 41(x-2) + \frac{42}{2!}(x-2)^2 + \frac{24}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 29 + 41(x-2) + 21(x-2)^2 + 4(x-2)^3$$

Aufgabe 2(Taylorreihe)

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x_0 = -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}, \qquad f'(-1) = -\frac{2}{(-1)^3} = 2$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 3}{x^4} = \frac{3!}{x^4}, \qquad f''(-1) = \frac{3!}{(-1)^4} = 3!$$

$$f'''(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} = -\frac{4!}{x^5}, \qquad f'''(-1) = -\frac{4!}{(-1)^5} = 4!$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \qquad f^{(n)}(-1) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = (n+1)!$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} (x+1)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n$$