Fachhochschule Köln
Cologne University of Applied Sciences

Angewandte Mathematik und Programmierung

Einführung in das Konzept der objektorientierten Anwendungen zu mathematischen Rechnens

WS 2012/13

Fomuso Ekellem

Inhalt

- **Wiederholung (Eigenschaften von Folgen zusammengefasst)**
- **Zahlenreihen**
- **Konvergenz von Reihen**
- **Beweis durch vollständige Induktion**

Wiederholung (Eigenschaften von Folgen zusammengefasst)

- **Eine Folge: Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen.**

$$a : \begin{cases} N \rightarrow R \\ n \mapsto a_n \end{cases}, \text{a kann mit } (a_1, a_2, a_3, \ldots) \text{ identifiziert werden}$$

$$\text{und wird mit } (a_n)_{n \in N} \text{ bezeichnet}$$

- **Allgemeine Darstellung**

$$a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

Wiederholung (Eigenschaften von Folgen zusammengefasst)

Eigenschaften:

- **Eine Folge (a_n) heißt monoton fallend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} \leq a_n$**
  Eine Folge (a_n) heißt streng monoton fallend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} < a_n$
  Eine Folge (a_n) heißt monoton steigend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} \geq a_n$
  Eine Folge (a_n) heißt streng monoton steigend, wenn für alle n gilt: $a_{n+1} > a_n$
- **Eine Folge (a_n) heißt nach unten beschränkt, falls gilt:** $\exists x \in R$ mit $a_n \geq x$ für alle $n \in N$
  Eine Folge (a_n) heißt nach oben beschränkt, falls gilt: $\exists x \in R$ mit $a_n \leq x$ für alle $n \in N$
  Eine Folge heißt beschränkt wenn sie nach unten und oben beschränkt ist
- **Eine Folge (a_n) heißt periodisch wenn gilt:** $\exists k \in N$ mit $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \in N$
  Das k heißt Periode von (a_n)
- **Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen die reelle Zahl a, wenn gilt:**
  $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > n(\varepsilon)$
  Bezeichnung: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$
  Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert

Wiederholung (Eigenschaften von Folgen zusammengefasst)

- **Eine Folge (a_n) heißt um a alternierend, wenn es Teilfolgen (b_n) und (c_n) gibt mit:**
  $\forall n \in N \text{ gilt}: b_n < a < c_n$
- **Eine Folge (a_n) besitzt einen Häufungspunkt, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt die gegen a konvergiert.**
- **Satz 1:**
  Jede konvergente Folge ist beschränkt
- **Satz 2:**
  Eine monotone Folge ist entweder unbeschränkt oder konvergent
- **Eine Folge die gegen 0 konvergiert heißt Nullfolge.**
- **Satz 3:**
  - Eine Folge (a_n) konvergiert gegen a $\Leftrightarrow$ (a_n-a) ist Nullfolge
  - Eine beliebige Linearkombination endlich vieler Nullfolgen ist eine Nullfolge

Folgen

- **Satz 4: (Rechenregeln für konvergente Folgen)**

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = a \lim_{n\to\infty} (b_n) = ab$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$

e) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ und } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \Rightarrow a \leq b$

- **Satz 5: (Cauchy-Konvergenzkriterium)**
  (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_n - a_m| < \varepsilon \text{ für alle } n,m > n(\varepsilon)$

Konvergenz von Folgen

- **Wir untersuchen das Verhalten von Zahlenfolgen für wachsende Indices n . Es kommen im Wesentlichen drei "Verhaltensmuster" vor:**
  1) Die Glieder der Folge nähern sich mit wachsendem n genau einer Zahl.
- $a_n = \frac{1}{n}$ **Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge dem Wert Null.**

$a_n = \frac{n}{n+1}$ Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder der Folge dem Wert 1.

$a_n = \frac{1}{n^2}$ Mit dem wachsenden n nähern sich die Glieder schneller der Folge dem Wert Null.

2) Mit wachsendem Index n "nähern sich die Glieder der Folge abwechselnd" zwei verschiedenen Zahlen.

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n} \equiv (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$$

3) Die Glieder der Folge wachsen mit n über jede noch so große Zahl. $a_n = n^2$

Konvergenz von Folgen

- **Also Man kann Konvergenz direkt erkennen z.B Folge(1/n)**
- **Man kann durch sukzessive Ableitung und Vereinfachung oder nur durch Vereinfachung bestimmen.**
- **Man kann durch l'hospitalsche Regel feststellen.**
- **Man kann auch durch bestimmte Eigenschaften oder Konvergenzkriterien bestimmen:**

Siehe Anhang:

L'HOSPITALSCHE Regel

- Wenn man den Grenzwert von Funktionen untersucht, gestaltet das sich oft schwierig und kann manchmal sehr lange dauern. Dabei hilft ein Sonderfall der Grenzwertbetrachtung: Die Regel von L´Hospital (lopital). Dabei gilt:

  Sind f und g in den jeweiligen Bereiche differenzierbare Funktionen und ist $a_x = \frac{f(x)}{g(x)}$ und

  $$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha} g(x) = 0 \text{ (bzw. } \infty)$$

  $$\alpha \in R$$

  (*l*iegt also die Situation $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ vor), so ist $S = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

  Sofern der letztere Grenzwert existiert.

Arithmetische Folgen

(n) arithmetische Folge

- Eine Folge, bei der die Differenz je zweier aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist, heißt **arithmetische Folge**. Rekursiv lauten die Glieder einer arithmetischen Folge $(a_n)_{n \in N}$ *ab* $n \geq 1$ wobei von einen gegebenen Startwert a_0 ausgegangen wird:

$$a_n = a_n + c \quad wobei \quad c \in R(const.)$$

- Eine arithmetische Folge beschreibt ein (diskretes) lineares, streng monotones Wachstum ($c > 0$) oder Abfallen ($c < 0$). Für $c = 0$ handelt es sich um konstante Folgen mit Glieder $a_n = a_0$ Da die Glieder arithmetischer Folgen stets konstanten Abstand voneinander haben, divergieren diese Folgen immer (außer im Fall $c = 0$, wo es sich um konstante und damit konvergente Folgen handelt).
- Setzt man die Rekursionsbedingung sukzessive auch in die Glieder a_n, a_{n-1} usw. ein und bildet $a_n = a_{n-1} + c = a_{n-2} + 2c = a_{n-3} + 3c = \ldots$, erkennt man leicht, dass die Glieder einer arithmetischen Folge durch $a_n = a_0 + nc$ für $n \in N$ gegeben sind. Dies entspricht einer Geradengleichung im R^2 bzw. einer (affin) linearen Funktion auf R, welche die y-Achse (Ordinate) in a_0 schneidet und die Steigung c besitzt (erweitere den diskreten Index $n \in N$ zur kontinuierlichen Variablen $x \in R$).

Arithmetische Folgen

(q^n) geometrische Folge

- Eine Folge, deren Quotient von unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern konstant ist, wird als geometrische Folge bezeichnet. Die die geometrische Folge $(a_n)_{n\in N}$ für $n \geq 1$ definierende Rekursionsbedingung ist zusammen mit einem gegebenen Anfangsglied a_0 :

$$a_n = \quad qa_n + c \qquad wobei \quad q \in R(const.)$$

- Beginnend mit $a_0 > 0$, stellen geometrische Folgen ein (diskretes) exponentielles, streng monotones Wachstum ($q > 1$) oder ein ebensolches Abfallen ($0 < q < 1$) dar. Für $q = 1$ ergibt sich die konstante Folge $a_n = a_0$ und bei $q = 0$ ist $a_n = 0$ $(n \geq 1)$. Für $q < 0$ ist die geometrische Folge alternierend.

(1/n) harmonische Folge

- Die harmonische Folge ist die mathematische Zahlenfolge der Kehrwerte der positiven ganzen Zahlen, also die Folge

$$a_n = \frac{1}{n} \; für \quad n \geq 1$$

- Die harmonische Folge konvergiert gegen Null: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Reihen

- Grob gesagt sind (unendliche) reelle Reihen unendliche Summen reeller Zahlen. Für eine reelle Folge $(a_n)_{n\in N}$ gibt die Folge der Partialsummen (bzw. Teilsummen) mit den Gliedern

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k$$

- Anlass zur Reihe $(S_k)_{k \in N}$. Eine Reihe ist demnach eine spezielle Folge der Form

$$\left(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, .. \right)$$

welche wie folgt notiert wird:

$$S = \sum_{n\in N} \text{ oder } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Konvergenz von Reihen

- Eine Reihe heißt konvergent, falls die zugehörige Folge der Partialsummen $(S_k)_{k \in N}$ konvergent ist. Ihr Limes S wird als Summe der Reihe bezeichnet und man schreibt

$$S = \sum_{n \in N} \text{ oder } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

- als Abkürzung für

$$S = \lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$

- Man bekommt meisten folgende Reihen -Aussagen. Sind die gültig, oder sind die überhaupt richtig oder falsch? Kann man überhaupt beweisen, dass die falsch oder richtig sind?

$$S = \sum_{i=0}^{n} 2i = n(n+1) \qquad S = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) = n^2 \qquad S = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vollständige Induktion

- In der Mathematik gibt es im Prinzip drei grundlegende Beweismethoden, mit denen man versucht, die Gültigkeit von mathematischen Aussagen zu beweisen bzw. herzuleiten.
  - Es gibt den direkten Beweis.
  - Es gibt den indirekten Beweis, auch "Beweis durch Widerspruch.„
  - Es gibt den Beweis durch vollständige Induktion. Mit der vollständigen Induktion können Aussagen über die natürlichen Zahlen bewiesen werden

  Bemerkung: Unter „Induktion“ versteht man (im Gegensatz zur „Deduktion“ eigentlich das –logisch unzulässige – Schließen von Einzelfällen auf alle Fälle. Die mathematische Induktion ist ein Werkzeug, mit dem man das sauber machen kann.
- Man beweist mit vollständige Induktion die Aussage erst für den Induktionsanfang (I.A.), meistens $n = 0$ oder $n = 1$. Dann beweist man, dass die Aussage für $n+1$ gilt, wenn die Aussage für n gilt (Induktionsschluss).

Vollständige Induktion

- **Prinzip der vollständigen Induktion.** Sei A eine Aussage oder eine Eigenschaft, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir schreiben auch A(n).

  Wenn wir wissen, dass folgendes gilt:

  (1) Induktionsbasis (Induktionsverankerung): Die Aussage A gilt im Fall $n = 1$ (das heißt, es gilt $A(1)$),

  (2) Induktionsschritt: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ folgt aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$, dann gilt die Aussage A für alle natürlichen Zahlen ≥ 1.

- **Erläuterung**

  Bedeutung der vollständigen Induktion: Um eine Aussage über unendlich viele Objekte nachzuweisen, muss man nur zwei Aussagen beweisen:

  Induktionsbasis: $A(1)$

  Induktionsschritt: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

  Man nennt A(n) auch die Induktionsvoraussetzung

Vollständige Induktion

- Die hinter diesem Prinzip stehende "Philosophie" ist die, dass man in objektiv kontrollierbarer Weise über eine Unendlichkeit ("alle" natürlichen Zahlen) sprechen kann. Die Bedeutung dieses Prinzips, wurde zwischen 1860 und 1920 u.a. von Moritz Pasch (Professor in Gießen) und Giuseppe Peano (Professor in Turin) entdeckt.

- **Problem (C.F. Gauß): 1+2+3 +...+ 100 = ???**

$$S = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

  - *D.h für jede natürliche Zahl n ≥ 1 gilt:* 1+2+... + n = n(n+1)/2.
  - In Worten: Die Summe der ersten n positiven ganzen Zahlen ist gleich (n+1)n/2.
  - Konsequenz: Man kann die Summe 1+2+3+...+n ganz einfach ausrechnen, und es passieren kaum Rechenfehler

Vollständige Induktion

- Der Trick von Gauß: Gauß hat die Summe $1+2+3+...+100$ nicht so bestimmt, sondern mit folgendem genialen Trick:

  $$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + n-2 + n-1 + n \\ & + n + n-1 + n-2 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ & = n+1 + n+1 + n+1 + \dots + n+1 + n+1 + n+1 \\ & = n(n+1). \end{aligned}$$

- Also gilt $1+2+3+...+n = n(n+1)/2$.

Beweis durch Vollständige Induktion:

- Beweis durch Vollständige Induktion:
- Beweis durch Induktion nach n. Die Aussage A(n) sei die Aussage des Satzes, also: A(n): $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$.
- Sowohl bei der Induktionsbasis als auch beim Induktionsschritt zeigen wir, dass in der entsprechenden Gleichung links und rechts das Gleiche steht.
- *Induktionsbasis: Sei n = 1. Dann steht auf der linken Seite nur der* Summand 1, und auf der rechten Seite steht $2\cdot 1/2$, also ebenfalls 1. Also gilt A(1)

Beweis durch Vollständige Induktion:

- Induktionsschritt:
- *Induktionsschritt: Sei n eine natürliche Zahl ≥ 1, und sei die* Aussage richtig für n. Wir müssen A(n+1) beweisen, das heißt, die Summe 1+2+3+... +(n–1) + n + (n+1) berechnen. Wir spalten wir diese Summe auf:

  1+2+3+... +(n–1) + n + (n+1)

  = [1+2+3+... +(n–1) + n] + (n+1)

  = n(n+1)/2 + (n+1) (nach Induktion)

  = [n(n+1) + 2(n+1)]/2 = (n+2)(n+1)/2.
- Insgesamt haben wir die Aussage A(n+1) bewiesen. Somit gilt der Satz.

Weitere Beispiele: Vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = n * (n+1)$$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} 2i = 2$, rechte Seite: $1 * (1+1) = 2$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i = \sum_{i=1}^{n} 2i + 2*(n+1) \overset{\text{I.A.}}{=} n * (n+1) + 2*(n+1) = (n+1) * ((n+ 1) + 1)$$

Weitere Beispiele: Vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 1$, rechte Seite: $1^2 = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i - 1) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) + (2*(n+1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Weitere Beispiele: Vollständige Induktion

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}$$

Induktionsanfang:

Linke Seite: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$, rechte Seite: $\frac{1 * (1+1) * (2*1+1)}{6} = 1$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6} + \frac{6*(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1) * (\, n * \ (2n+1) + 6 * (n+1)\,)}{6} = \frac{(n+1) * (\, 2n^2 + n + 6n + 6)}{6} =$$

$$\frac{(n+1) * (\,(n+2) * (2n+3))}{6} = \frac{(n+1) * \ (n+2) * (2 * \ (n+1) + 1)}{6}$$