Zahlenfolgen und Konvergenzkriterien

Definition: (Zahlen-Folgen, Grenzwert)
Eine Folge ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen in die Menge A. Es ist also im Fall $A := \mathbb{R}$;
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(x)=(a_n)$ eine reelle Folge. (Wir betrachten im Folgenden ausschließlich reelle Folgen)

Dabei bezeichnen wir die Elemente der Folge als *Folgenglieder* und bezeichnen diese mit a_n.

Eine reelle Folge heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, von dem ab $|a_n - a| < \varepsilon$ ist. Ein solches a heißt **Grenzwert** der Folge (a_n) und wird mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Satz: (ε-n_0-Kriterium und äquivalente Aussagen)

Sei $f=(a_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ gibt es mind. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$|a_n - a| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für fast alle n

$\Leftrightarrow$ Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| > \varepsilon$ für höchstens endlich viele Ausnahmen n.

Das ε-n_0-Kriterium fordert, dass der Grenzwert schon bekannt ist oder erraten wird, bevor man den Nachweis der Konvergenz erbringen kann. Es gibt Methoden auch Folgen auf Konvergenz hin zu untersuchen ohne vorher den Grenzwert zu kennen.

Beispiel:

Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n^2+1} = 1/3$ durch Rückgang auf die ε-n_0-Definition.

Es muss für alle $\varepsilon > 0$ gelten $|a_n - a| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{n^2-1}{3n^2+1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \left| \frac{n^2-1-\frac{1}{3}(3n^2+1)}{3n^2+1} \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \left| \frac{-\frac{4}{3}}{3n^2+1} \right| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left| \frac{-4}{3(3n^2+1)} \right| < \frac{4}{n}$$

Wobei zu Schluss sehr grob abgeschätzt wurde. (Genauere Abschätzungen sind nur gefragt, wenn man an möglichst kleinen n_0 interessiert ist).

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$ bzw. $\frac{4}{n_0} < \varepsilon$ (so ein n_0 existiert nach Archimedes). Nach obigen Abschätzungen gilt dann

$$\left| \frac{n^2-1}{3n^2+1} - \frac{1}{3} \right| < \frac{4}{n_0} < \frac{4}{n} < \varepsilon \text{ für alle } n > n_0.$$

Bemerkung:
Ein Folge a_n hat *höchstens einen* Grenzwert a.

Beweis:

Sei a_n konvergent gegen a, und sei $b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq a$. Wir zeigen, dass f nicht gegen b konvergieren kann. Wegen der Hausdorfeigenschaft gibt es eine Umgebung U von a und V von b mit $U \cap V = \emptyset$. Nach Voraussetzung liegen fast alle Glieder von f in U; in V können also höchstens endlich viele Glieder von a_n liegen, so dass a_n nicht gegen b konvergent sein kann.

Definition: (**beschränkte Folge**)
Eine Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist, d.h. wenn es ein $S>0$ gibt mit

$$|a_n| \leq S, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

oder äquivalent, wenn

$$\|(a_n)\| := \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

ist.

Beispiel:

Sei $(a_n):=(-1)^n$ eine reelle Folge. Die Menge der Folgenglieder ist $\{-1,1\}$; es handelt sich also um eine beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ und daher existiert ein reelles Supremum, d.h. es gilt
$\|(a_n)\| = \sup(\{|-1|,|1|\}) < \infty$.
Es existiert also eine obere Schranke S, bspw. sei $S=2$, und es gilt $|a_n|=|1|\leq S$. Es ist die Supremums-Norm $\|(a_n)\| = 1$.

Satz: (Monotoniekriterium)

Eine monotone Folge $f=(a_n)$ ist konvergent, wenn sie beschränkt ist. Genauer:

1) Ist f monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist f konvergent, und es gilt $\lim f = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2) Ist f monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist f konvergent, und es gilt $\lim f = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beispiel:

Zeigen Sie, dass die Folge $f=(a_n)$ mit $a_n=\frac{n}{3n-1}$ konvergiert.

Beweis:

$\mathbf{a_n - a_{n+1} \geq 0}$

Da die Funktion wahrscheinlich monoton fällt, muss das (n)-te Glied der Folge größer oder gleich als das (n+1)-te Glied sein.

$$\frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3(n+1)-1} = \frac{n}{3n-1} - \frac{n+1}{3n+2} = \frac{(3n+2)n}{(3n+2)(3n-1)} - \frac{(n+1)(3n-1)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{(3n+2)n-(n+1)(3n-1)}{(3n+2)(3n-1)} = \frac{1}{(3n+2)(3n-1)} > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mit dieser Rechnung erschlägt man zwei Probleme auf einmal. Zum einen ist damit die Monotonie nachgewiesen, zum anderen aber auch die Beschränktheit. Es gilt ja $\frac{1}{(3n+2)(3n-1)} > 0$ für alle natürlichen n und somit bildet 0 eine untere Schranke. Mit dem Monotoniekriterium folgt, dass a_n konvergiert und es gilt $\inf\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \dots\} = \lim a_n = \frac{1}{3}$.

Bei monoton steigenden Funktionen, geht man analog vor.

Definition:
Eine Folge $f=(a_n)$ heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}:$$
$$(n>n_0 \Rightarrow | a_n - a_{n_0} | < \varepsilon)$$

In Worten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 (i. Allg. von ε abhängig), so dass gilt $| a_n - a_{n_0} | < \varepsilon$ für jedes $n>n_0$.

Die typische Eigenschaft einer Cauchyfolge ist also, dass man ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgeben kann, so dass die Folgenglieder a_n, mit $n>n_0$, entsprechend nahe (d.h. es gilt $| a_n - a_{n_0} | < \varepsilon$) bei a_{n_0} liegen.

Satz: (Cauchykriterium)

Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beispiel:

Zeigen Sie, dass die Folge $f=(a_n)$ mit $a_n = \frac{n}{3n-1}$ konvergiert. Sei $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Dieses mal zeigen wir die Konvergenz mit Hilfe des Cauchykriteriums. Es muss also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_0 geben, so dass gilt

$| a_n - a_{n_0} | < \varepsilon$ für jedes $n>n_0$.

$$= \left| \frac{n}{3n-1} - \frac{n_0+1}{3(n_0+1)-1} \right| = \left| \frac{n}{3n-1} - \frac{n_0}{3n_0-1} \right| = \left| \frac{(n)(3n_0-1)}{(3n-1)(3n_0-1)} - \frac{(n_0)(3n-1)}{(3n_0-1)(3n-1)} \right| = \left| \frac{(3n_0n-n)}{(3n-1)(3n_0-1)} - \frac{(3n_0n-n_0)}{(3n_0-1)(3n-1)} \right|$$

$$= \left| \frac{n_0-n}{(3n_0-1)(3n-1)} \right| = \frac{-n_0+n}{(3n_0-1)(3n-1)} \leq \frac{n}{(3n-1)(3n_0-1)} = \frac{n}{(3n-1)} \frac{1}{(3n_0-1)},$$ da $-n_0$ negativ im Zähler.

$\leq \frac{n}{n} \frac{1}{n_0} = \frac{1}{n_0}$. Nach dem Satz des Archimedes gibt es für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt dann:

$\left| a_n - a_{n_0} \right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge und somit konvergiert diese als reelle Folge.

Bemerkung:
Dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist, kann man leicht zeigen. Die andere Richtung ist interessanter: Die Konvergenz einer Cauchy-Folge ist in archimedisch angeordneten Körpern äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom.

Satz: (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen, wobei $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$, $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $[(a_n)+(b_n)]$ ist dann ebenfalls eine konvergente Folge mit $[(a_n)+(b_n)] \xrightarrow{n\to\infty} [a+b]$

(ii) $[c(a_n)]$ ist dann ebenfalls eine konvergente Folge mit $[c(a_n)] \xrightarrow{n\to\infty} [ca]$

(iii) $[(a_n)(b_n)]$ ist dann ebenfalls eine konvergente Folge mit $[(a_n)(b_n)] \xrightarrow{n\to\infty} [ab]$

(iv) $\frac{(a_n)}{(b_n)}$ ist dann ebenfalls eine konvergente Folge mit $\frac{(a_n)}{(b_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$ und $(b_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es können also u.U. alle arithmetischen Operationen auf dem Raum der konvergenten Folgen ausgeübt werden.

Bemerkung 1:
Dass Punkt (iv) in obigem Satz nicht für Nullfolgen gelten kann, folgert man unmittelbar aus den nicht erfüllten Voraussetzungen $b \neq 0$ und $(b_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2:
Die konvergenten Folgen bilden also einen Vektorraum und die Zuordnung $(a_n) \to \lim (a_n)$ ist eine lineare Abbildung in den Grundkörper. Die Multiplikation mit einer konvergenten Folge mit einem Körperelemente stellt dabei die Skalarmultiplikation dar.

Proposition: (Produkt aus Nullfolgen und beschränkten Folgen)

Sei (a_n) eine konvergente Nullfolgen, wobei $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$. Sei weiter (h_n) eine beschränkte Folge. Dann gilt:

$(a_n)(h_n)$ ist eine Nullfolge.

In Worten: Das Produkt einer Nullfolge und einer beschränkten Folge ist wieder eine Nullfolge, also konvergent.

Beispiel:

Untersuche Sie, ob die Folge $(a_n) := \frac{3(-1)^n}{n^3} + 2(-1)^{n+1}$ konvergiert und bestimmen Sie evtl. den Grenzwert.

Es ist $\frac{3(-1)^n}{n^3}$ eine Nullfolge. Das Produkt aus einer beschränkten Folge $3*(-1)^n$ und einer Nullfolge $1/n^3$ ergeben nach obiger Proposition wieder eine Nullfolge. Damit (a_n) konvergent wäre, müsste also auch $2(-1)^{n+1}$ konvergent sein.

Das ist aber nicht der Fall. Nach dem Divergenzkriterium ist $2(-1)^{n+1}$ mit den beiden Teilfolgen $2(-1)^{2k} \xrightarrow{n\to\infty} \hat{2}$ und $2(-1)^{2k+1} \xrightarrow{n\to\infty} \widehat{-2}$ nicht konvergent, da die Grenzwerte nicht übereinstimmen.

Insgesamt folgt, dass die Folge (a_n) divergent ist.

Satz: (Sandwich-Theorem, Quetschlemma)

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen, wobei $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a$ und $(b_n) \xrightarrow{n\to\infty} b$ mit $b=a$.
Ist (c_n) eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist (c_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert $c=a=b$.

Beweis:

Wir stellen zunächst fest, dass (b_n)-(a_n)= (a_n)-(b_n) mit den Rechenregeln über konvergente Folgen eine Nullfolge ist, da $\lim(a_n)=\lim(b_n)$. Weiter gilt nach Voraussetzung und erster Folgerung

$$\begin{array}{lllll} & a_n & \leq c_n & \leq b_n & \quad | -a_n \\ (*) & 0 & \leq c_n - a_n & \leq b_n - a_n & \end{array}$$

für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Da (b_n)-(a_n) eine Nullfolge ist, liegen in jeder Umgebung von 0 fast alle Glieder b_n-a_n.

Um nachzuweisen, dass auch (c_n)-(a_n) eine Nullfolge ist, betrachten wir eine Umgebung U von 0. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subset U$, und in $U_\varepsilon(0)$ liegen fast alle b_n-a_n. Wegen (*) liegen daher auch fast alle c_n-a_n in $U_\varepsilon(0)$. Damit ist gezeigt, dass (c_n)-(a_n) eine Nullfolge ist.

Beispiel:

Wir überprüfen, ob die Folge $(a_n) := \dfrac{1+n}{n^3+5}$ konvergiert. Es gilt

$$0 < \frac{1+n}{n^3+5} = \frac{1/n + 1}{n^2 + 5/n} \leq \frac{1/n + 1}{n^2} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n \to \infty .$$

Die Folge liegt also zwischen der konstanten Nullfolge und der Folge $\frac{1}{n}$ und da gilt $\lim \frac{1}{n} = \lim 0 = 0$ ist der Grenzwert von (a_n) ebenfalls 0.

Bemerkung:
Bei Folgen mit Wurzeln im Term, muss der Zähler rational gemacht werden. I.d.R. kann man so überprüfen, ob die Folge konvergiert und evtl. den Grenzwert berechnen.

Beispiel:

Überprüfen Sie, ob die Folge $(a_n) := \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ konvergiert und bestimmen Sie evtl. den Grenzwert.

Jeder Term, kann als Bruch aufgefasst werden. Es ist

$$\begin{aligned} (a_n) \quad &= \sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}{1} = \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{1(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(1+x-x)}{1(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})} . \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{\infty} + \sqrt{\infty})} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Satz: (Endlich viele Abänderungen)

Seien (a'_n) entstehe aus (a_n) durch Abänderung oder durch Weglassen oder durch Hinzufügen endlich vieler Glieder. Ist (a_n) konvergent, so auch (a'_n), und in diesem Fall ist

$$\lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} a_n =: a.$$

Beweis:

In jeder Umgebung von a liegen fast alle Glieder a_n; das sind aber auch fast alle Glieder a'_n .

Dieser Satz ist unmittelbar klar, da eine Folge genau dann konvergent ist, wenn fast alle Glieder in einer beliebigen Umgebung um den Grenzwert liegen. Die endlich vielen Ausnahmen, also die Abänderungen, spielen in Folge dessen keine Rolle.

Wir haben sträflicher Weise den Begriff Teilfolge bereits benutz ohne ihn zu definieren, dies holen wir nun nach und geben sogleich auch ein Kriterium an.

Definition: (Teilfolge)
Die Folge (a'_n) heißt eine Teilfolge von (a_n), wenn es eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ gibt mit $n_k < n_{k+1}$ und $a'_k = a_{n_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. (a'_k) entsteht also aus (a_n) durch Weglassen von endlich oder unendlich vielen Gliedern.

Satz: (Teilfolgen)

Jede Teilfolge (a'_k) einer konvergenten Folge (a_n) ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a'_k = \lim_{n\to\infty} a_n =: a.$$

Beweis:

Ist U Umgebung von a, so liegen fast alle Glieder a_n darin und erst recht fast alle Glieder der Teilfolge (diese wurde ja sozusagen gestutzt).

Beispiel:
Der Satz besagt, dass jede Teilfolge einer bekannten konvergenten Folge selbst konvergent ist. Kennt man also viele konvergente Folgen und deren Grenzwerte, so kann dieses Kriterium sehr mächtig sein.
Sei $(a'_k) := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$, diese Folge ist aber Teilfolge von $(a_k) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und zwar werden hier sämtliche Werte bis auf die Quadrate von n ausgelassen. Mit obigem Satz folgt sofort, dass die angegebene Folge gegen e konvergiert.

Nun betrachten wir den entgegengesetzten Fall, also die Divergenz einer Folge. Es gibt auch Folgen die weder bestimmt divergieren noch konvergieren, dazu später mehr.

Definition: (Divergenz)
Eine Folge (a_n) heißt divergent, wenn die Folge (a_n) keinen Grenzwert besitzt.

Um die Divergenz nachzuweisen benutzt man oft folgenden

Satz: (Divergenzkriterium)

Besitzt eine Folge $f=(a_n)$
- eine divergente Teilfolge oder
- zwei konvergente Teilfolgen f' und f'' mit lim f' $\neq$ lim f'', so ist f divergent.

Beispiel:

Sei $a_n=\dfrac{2^n+(-2^n)}{2^n}$. Sei $f'=\dfrac{2^{2k+1}+(-2^{2k+1})}{2^{2k+1}}$ die Menge aller Folgenglieder aus a_n für n ungerade und sei weiter $f''=\dfrac{2^{2k}+(-2^{2k})}{2^{2k}}$ die Menge aller Folgenglieder aus a_n mit geradem n. Dann gilt

$$f'=\frac{2^{2k+1}+(-2^{2k+1})}{2^{2k+1}}=\frac{2^{2k+1}-2^{2k+1}}{2^{2k+1}}=1-1=0.$$

$$f''=\frac{2^{2k}+2^{2k})}{2^{2k}}=2\frac{2^{2k}}{2^{2k}}=2*1=2.$$

Es existieren also zwei Teilfolgen, die je für sich genommen konvergieren. Jedoch ist lim f' = 0 und lim f''=2. Mit dem Divergenzkriterium folgt, dass a_n divergent ist.

Beweis:

1.Fall: (eine divergente Teilfolge)
Besitzt (a_n) eine divergente Teilfolge, so kann f nicht konvergent sein, denn sonst wäre jede Teilfolge von (a_n) ebenfalls konvergent (siehe Satz oben).
2. Fall: (zwei konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichem GW)
Besitzt (a_n) zwei konvergente Teilfolgen (b_n) und (c_n) mit nicht identischem GW und wäre (a_n) konvergent, dann müsste nach dem Satz von Teilfolgen gelten $\lim(b_n)=\lim(c_n)=\lim(a_n)$. Dies widerspricht aber den Voraussetzungen.