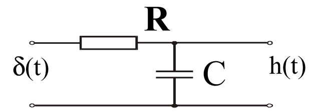
# Faltungsintegral



## Charakterisierung des Systems

1. Übertragungsfunktion zB $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega CR}$

2. Impulsantwort (Antwort auf δ(t))




$$\begin{aligned} Ri + h(t) &= \delta(t) \\ CR\frac{dh}{dt} + h(t) &= \delta(t) \\ CRj\omega \underline{H}(j\omega) + \underline{H}(j\omega) &= 1 \\ H(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega CR} \end{aligned}$$

$\mathcal{F}$

Gleiche Ergebnis wie Spannungsteiler!

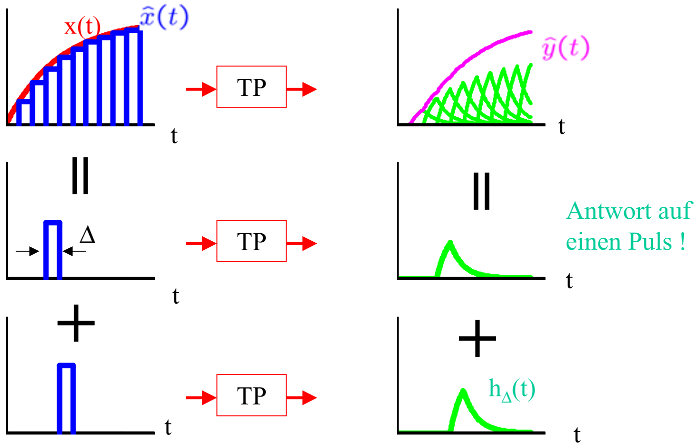
Impulsantwort: $\boxed{h(t) = \frac{1}{CR} e^{-\frac{t}{CR}}}$

Inverse Fouriertransformation



## Faltungsintegral (anschaulich)

Wie lautet der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal im Zeitbereich ?






## Faltungsintegral (anschaulich)

Eingang:

Darstellung der Funktion x(t):

Ausgang:

Darstellung der Funktion y(t):

$$\hat{x}(t) = \sum_k x(k\Delta)\underbrace{\delta_\Delta(t - k\Delta)}_{\text{Höhe } = 1}\Delta \longrightarrow \hat{y}(t) = \sum_k x(k\Delta) h_\Delta(t - k\Delta)\Delta$$

Grenzübergang Δ→ 0

| | | |
|---|---|---|
| kΔ → τ | $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ | $\hat{y}(t) \rightarrow y(t)$ |
| $\delta_\Delta(t) \rightarrow \delta(t)$ | $\sum \cdots \Delta \rightarrow \int \cdot d\tau$ | $h_\Delta(t) \rightarrow h(t)$ |

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Faltungsintegral:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ y(t) &= (h * x)(t) \end{aligned}}$$

Faltungssymbol

Es folgt:

$$\boxed{\mathcal{F}\{(h * g)(t)\} = \underline{H}(j\omega)\underline{G}(j\omega)}$$

# Faltungsintegral (mathematisch)

Faltungssatz:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &= \underline{F}(j\omega)\\ \mathcal{F}\{g(t)\} &= \underline{G}(j\omega)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\} = \underline{F}(j\omega)\underline{G}(j\omega)}$$

erlaubt wenn
$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2dt < \infty$
und
$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt < \infty$

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]dt\end{aligned}$$

Vertauschen der Integrationen: Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= \mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]}_{\underline{G}(j\omega)e^{-j\omega\tau}}d\tau\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\underline{G}(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau = \underline{G}(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\ &= \underline{G}(j\omega)\underline{H}(j\omega)\end{aligned}$$



# Lineare Systeme

Sei x(t) das Eingangssignal, bzw. y(t) das Ausgangssignal eines „linearen“, „zeitinvarianten“ Systems.

Linear Time-Invariant System: LTI-System

x(t) → [LTI System] → y(t)

Es gelte der folgende Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen:

$x(t)=x_1(t) \rightarrow y(t)=y_1(t)$
$x(t)=x_2(t) \rightarrow y(t)=y_2(t)$

a,b: beliebige Konstanten
$x_1(t)$, $x_2(t)$ beliebige Eingangsfunktionen

Ein System ist linear, wenn gilt:

$$\boxed{x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)}$$



# Beispiele

1. Ist y(t) = 10 x(t) linear ?

$y_1(t) = 10\,x_1(t)$
$y_2(t) = 10\,x_2(t)$

$\Rightarrow x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$

$$\begin{aligned}y(t) &= 10(a\,x_1(t) + b\,x_2(t))\\ &= a\,10\,x_1(t) + b\,10\,x_2(t)\\ &= a\,y_1(t) + b\,y_2(t)\end{aligned}$$

Ja

2. Ist y(t) = 10 x(t) + 5 linear ?

$y_1(t) = 10\,x_1(t) + 5$
$y_2(t) = 10\,x_2(t) + 5$

$\Rightarrow x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\begin{aligned}y(t) &= 10(x_1(t) + x_2(t)) + 5\\ &= 10\,x_1(t) + 10\,x_2(t) + 5\\ &\neq y_1(t) + y_2(t)\end{aligned}$$

Nein



# Zeitinvariante Systeme– Faltungsintegral

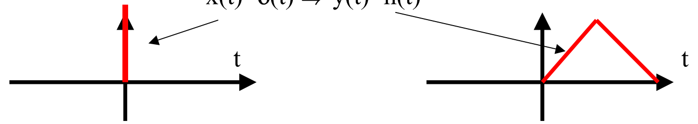
Ein System heißt zeitinvariant: wenn eine um die Zeitdifferenz $t_0$ zeitlich verschobene Eingangsgröße x $(t-t_0)$ die um die gleiche Zeitdifferenz verschobene Ausgangsgröße $y(t-t_0)$ ergibt:

$$\boxed{f(x(t)) = y(t) \quad \Rightarrow \quad f(x(t-t_0)) = y(t-t_0)}$$

Für ein LTI System gilt:

Wenn h(t) die Impulsantword des Systems ist, d.h wenn gilt:

$x(t)=\delta(t) \Rightarrow y(t)=h(t)$




dann gilt für jedes beliebige Eingangssignal x(t) als Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$$

## Faltungsintegral

Es gilt:

$$y(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\; d\tau$$
$$= h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

Faltungssatz der Fouriertransformation:

| | | |
|---|---|---|
| Behauptung: sei f(t) | ○——● | $\underline{F}$(jω) |
| g(t) | ○——● | $\underline{G}$(jω) |
| Dann gilt: f(t)*g(t) | ○——● | $\underline{F}$(jω)$\underline{G}$(jω) |



## Faltung im Frequenzbereich

Faltungssatz:

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{F}\{f(t)\} = \underline{F}(j\omega)\\ \mathcal{F}\{g(t)\} = \underline{G}(j\omega)\end{array} \Longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(j\omega)\underline{G}(j(\omega_0-\omega)d\omega\} \;=\; f(t)g(t)}$$

erlaubt wenn $\int_{-\infty}^{\infty}|\underline{G}(j\omega)|^2 d\omega \;<\; \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty}|\underline{H}(j\omega)|^2 d\omega < \infty$

$$h(t) \;=\; \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{H}(\xi)\underline{G}(\omega-\xi)d\xi\}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(\xi)\underline{G}(\omega-\xi)d\xi\right] d\omega$$

Vertauschen der Integrationen:

$$\boxed{\eta = \omega - \xi}$$

$$h(t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\underline{G}(\omega-\xi)d\omega\right] d\xi$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta t+j\xi t}\underline{G}(\eta)d\eta\right] d\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(\xi)e^{j\xi t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta t}\underline{G}(\eta)d\eta\right] d\xi$$
$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(\xi)e^{j\xi t}d\xi}_{f(t)}\;\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\eta t}\underline{G}(\eta)d\eta}_{g(t)} = f(t)g(t)$$



## Eigenschaften des Faltungsintegral

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x-\alpha)d\alpha \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha)f(x-\alpha)d\alpha$$

2. $$f(x)*\delta(x) \;=\; \delta(x)*f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha)f(x-\alpha)d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\delta(x-\alpha)d\alpha = f(x)$$

3. $$\delta(x-a)*f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\alpha-a)f(x-\alpha)d\alpha$$
$$= -\int_{\infty}^{-\infty}\delta(x-s-a)f(s)ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta([x-a]-s)f(s)ds = f(x-a)$$

$\cdot\alpha$



## Parseval'sche Theorem

Sehr häufig wird die Energie oder Leistung benötigt, d.h. das zeitliche Integral über das Quadrat der Spannung oder des Stroms ist gesucht:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}|\underline{F}(j\omega)|^2 d\omega}$$

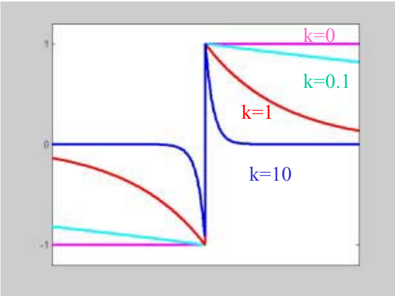
Hierbei wird die Existenz der Integrale vorausgesetzt

Beweis: Sei f(t) ○——● $\underline{F}$(jω)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)e^{-j\omega t}dt \;=\; \mathcal{F}\{f(t)f^*(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}*\mathcal{F}\{f^*(t)\}$$
$$= \underline{F}\{j\omega\}*\mathcal{F}\{f^*(t)\}$$
$$= \underline{F}\{j\omega\}*\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}dt\right]$$
$$= \underline{F}\{j\omega\}*\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t}dt\right]^*$$
$$= \underline{F}\{j\omega\}*\underline{F}^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(j\eta)\underline{F}^*(j(-\omega+\eta))d\eta$$

Grenzwert ω→ 0 ⇒ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)e^{-j\omega t}dt \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\underline{F}(j\eta)\underline{F}^*(j\eta)d\eta$

## Foiuriertransformierte der Signum-Funktion




Die Signum Funktion erfüllt die Dilichletschen Bedingungen nicht.

Sie kann aber als Distribution gedeutet werden und zwar als Grenzwert:

Die Signum Funktion als Grenzwert von

$$sgn(t) = \lim_{k\to 0+} \begin{cases} e^{-kt} & (t>0) \\ -e^{kt} & t<0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{sgn(t)\} &= \lim_{k\to 0+}\left[-\int_{-\infty}^{0} e^{kt}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-kt}e^{-j\omega t}dt\right] \\
&= \lim_{k\to 0+}\left[-\frac{1}{-j\omega+k}e^{(-j\omega+k)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-j\omega-k}e^{(-k-j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \lim_{k\to 0+}\left[-\frac{1}{-j\omega+k} - \frac{1}{-j\omega-k}\right] = \lim_{k\to 0+}\left[\frac{-2j\omega}{\omega^2+k^2}\right] = \frac{2}{j\omega}
\end{aligned}$$



## Fouriertransformierte der Sprungfunktion

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{2}(1+sgn(t)) \\
\mathcal{F}\{(u(t)\} &= \frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}) \\
&= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}
\end{aligned}$$



## Integration im Zeitbereich

$$\mathcal{F}\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = (f*u)(t) \\
\mathcal{F}\{(f*u)(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t)\}(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega})) \\
&= F(j\omega)(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) \\
&= \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)F(0)
\end{aligned}$$

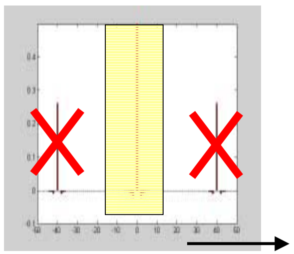


## Bandbegrenzte und zeitbegrenzte Systeme

Ohne Beweis:

Ein zeitbegrenztes Signal ist nie bandbegrenzt !!!!

Ein bandbegrenztes Signal ist nie zeitbegrenzt !!!



$\omega/\omega_0$

Multiplikation im Frequenzbereich mit der Funktion:

$$\underline{H}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |\omega| < B \\ 0 & \text{für} \quad |\omega| > B \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{j2\pi t}e^{j\omega t}\Big|_{-B}^{B} = \frac{1}{j2\pi t}\left(e^{jBt} - e^{-jBt}\right) \\
&= \frac{1}{\pi t}sin(Bt) = \frac{B\sin(Bt)}{\pi \quad Bt}
\end{aligned}$$

Ideale Tiefpassfilterung entspricht Faltung mit der si Funktion im Zeitbereich

## Fouriertransformation von periodischen Signalen

Periodische Funktion f(t) kann mit Hilfe der Fourierreihe dargestellt werden

Sei $f(t)=f(t+T)$ für alle t, T: Periodendauer; $\omega_1=2\pi/T$; $\omega_n=n\,\omega_1$

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{j\omega_n t} \quad \text{mit} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{jn\omega_1 t}$$

**Fouriertransformation**:

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\delta(\omega)$$

$$\underline{c}_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\underline{c}_n\delta(\omega)$$

Für beliebiges f(t) gilt

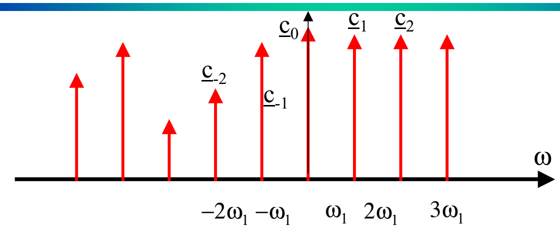
$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \underline{F}(j\omega)$$

$$\underline{c}_n e^{jn\omega_1 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi\underline{c}_n\delta(\omega-\omega_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_1 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \delta(\omega-\omega_n)$$



## Spektrum eines periodischen Signals




D.h. Periodisches f(t) $\circ\!\!-\!\!\bullet$ Diskretes Spektrum

Ebenso gilt umgekehrt

D.h. Periodisches $\underline{F}(\omega)$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ Diskrete Werte im Zeitbereich

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_i \delta(t - i\Delta T)$$



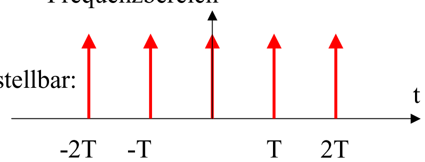
## Dirac-Kamm

$\omega_1=2\pi/T$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

gleichmäßige Diracfolge im Zeitbereich

gleichmäßige Diracfolge im Frequenzbereich




Beweis:

x(t) periodisch, daher als Fourierreihe darstellbar:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_1 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-n\omega_1) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-n\omega_1)$$

Koeffizienten der Fourierreihe:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_1 t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jn\omega_1 t} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_1 t}$$



## Dirac Kamm

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_1 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \underline{X}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$