Praktikum im Fach Algorithmische Anwendungen

Aufgabe:
Implementieren der Kapitalwertmethode unter Berücksichtigung variabler Zinssätze

Vorgelegt am 02.02.2006
Studiengang Allgemeine Informatik
Wintersemester 2005/2006

Bei: Prof. Dr. Klocke
An der Fachhochschule Köln Campus Gummersbach

Erstellt von Gruppe E Blau:

Peter Kolvenbach (Matrikelnummer:11037014)
Sven Achenbach (Matrikelnummer: 11037008)

Inhaltsverzeichnis

Kapitalwert

Der Kapitalwert ist das Ergebnis einer Investitionsrechnung nach der Kapitalwertmethode, die auch Diskontierungs- und Barwertmethode genannt wird. Zur Ermittlung des Kapitalwerts werden alle zukünftigen Ein- und Auszahlungen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt unmittelbar vor Beginn der Investition abgezinst. Die Differenz zwischen den abgezinsten Einzahlungen und den abgezinsten Auszahlungen ergibt den Kapitalwert. Ist der Kapitalwert positiv, so gibt er die Zahlungsüberschüsse an, die sich nach Berücksichtigung aller Auszahlungen und der Zinsen aus dem Projekt ergeben.
(in Anlehnung an Wöhe 1990)

Berechnung des Kapitalwerts

Gehen wir von folgendem Beispielangebot aus:

Wir investieren 9.600 € und erhalten in der Folge dafür 3 Zahlungen zu je 3.500 €. Die Summe dieser Zahlungen (10.500 €) übersteigt unseren Investitionsbetrag um 900 €. Auf den ersten Blick eine klare Angelegenheit.

Allerdings haben wir bei dieser Rechenoperation nicht berücksichtigt, dass wir dabei gewissermaßen Äpfel mit Birnen vergleichen. Wir addieren nämlich

3.500 €, die uns in einem Jahr zufließen werden,
3.500 €, die uns in zwei Jahren zufließen werden,
3.500 €, die uns in drei Jahren zufließen werden
und vergleichen die Summe mit
9.600 €, die wir heute zahlen.

Statthaft ist aber nur die Addition von gleichnamigen Größen - die Zeitwerte unserer Zahlungen müssen auf einen gemeinsamen Zeitpunkt umgerechnet werden. Bei der Bar-Kapitalwertmethode ist das die Gegenwart.

Wir wissen, dass wir unser Geld jederzeit verzinslich anlegen können. Folglich sollten Beträge, die wir in der Zukunft erwarten, verzinste Beträge, also das Ergebnis einer Verzinsung sein.

Nehmen wir an, dass wir als Alternative zu dem angebotenen Auszahlplan unser Kapital auch auf einem Sparbuch mit 3 % p.a. Verzinsung anlegen könnten. Wenn das Beispielangebot keine schlechtere Verzinsung als das Sparbuch bieten soll, dann müssen die drei Zahlungen von je 3.500 € das Ergebnis einer mindestens 3 %-igen Verzinsung des investierten Kapitals sein. Wie lässt sich das überprüfen?

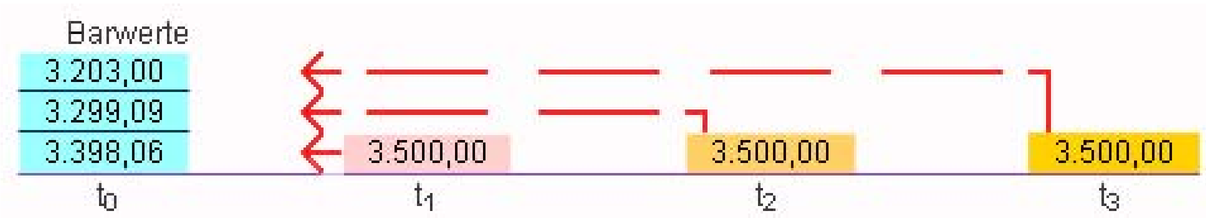
Berechnen wir zunächst, wie viel wir auf dem Sparbuch heute festlegen müssten, um die in Frage stehenden 3 Teilbeträge nach einem, zwei bzw. drei Jahren abheben zu können.

Mathematisch ausgedrückt: Wir bestimmen die Barwerte der künftigen Zahlungen.

Nehmen wir an, dass wir als Alternative zu dem angebotenen Auszahlplan unser Kapital auch auf einem Sparbuch mit 3 % p.a. Verzinsung anlegen könnten. Wenn das Beispielangebot keine schlechtere Verzinsung als das Sparbuch bieten soll, dann müssen die drei Zahlungen von je 3.500 € das Ergebnis einer mindestens 3 %igen Verzinsung des investierten Kapitals sein. Wie lässt sich das überprüfen?

Berechnen wir zunächst, wie viel wir auf dem Sparbuch heute festlegen müssten, um die in Frage stehenden 3 Teilbeträge nach einem, zwei bzw. drei Jahren abheben zu können.

Mathematisch ausgedrückt: Wir bestimmen die Barwerte der künftigen Zahlungen.



Die Summe der Barwerte aller erwarteten Zahlungen beträgt 9.900,15 €.

Damit wurde ermittelt, welcher Betrag heute investiert werden muss, um bei einer Verzinsung von 3 % p.a. die drei künftigen Zahlungen zu je 3.500,00 € zu erhalten.
Legen Sie die 9.900,15 € z.B. auf drei Sparbüchern mit entsprechenden Laufzeiten an, so erhalten Sie genau jene Zahlungen, welche Sie auch aus dem Beispielangebot erhalten können:

3.398,06	→	3.500,00				
3.299,09	→		→	3.500,00		
3.203,00	→		→		→	3.500,00
9.900,15						

Vergleichen wir das nun mit der beim Beipielangebot geforderten Investitionssumme:

- 9.600,00

300,15

Die Barwerte der künftigen Einzahlungen übersteigen den Barwert unserer zu leistenden Auszahlung um 300,15 €. Diesen Differenzbetrag bezeichnen wir als KAPITALWERT der Investition.
Bei Annahme des Beipielangebots müssen 300,15 € weniger als bei einer 3%igen Verzinsung investiert werden, um das gleiche Ergebnis zu erzielen. Der positive Kapitalwert signalisiert uns somit, dass der Auszahlplan gegenüber einer Anlage zu 3 % p.a. vorteilhaft.

Entscheidungsregeln:

→ Investitionen mit einem negativen Kapitalwert sind abzulehnen.
→ Bei der Auswahl zwischen Investitionsalternativen ist jene mit dem höheren Kapitalwert vorteilhaft.

Kapitalwertberechnungsprogramm

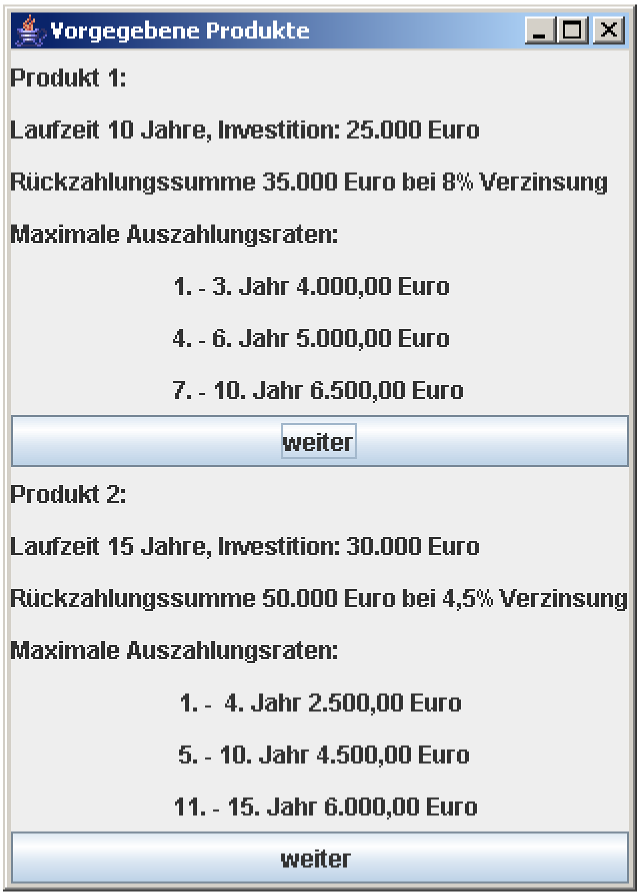
Das von uns entwickelte Java-Programm zum berechnen des Kapitalwerts einer Investition sieht zwei verschiedene Anwendungsgebiete vor. Zum einen die Möglichkeit ein fest vorgegebenes Produkt zu berechnen und zum anderen den Kapitalwert eines selbstdefinierten Produktes zu ermitteln.

Beschreibung des Programms

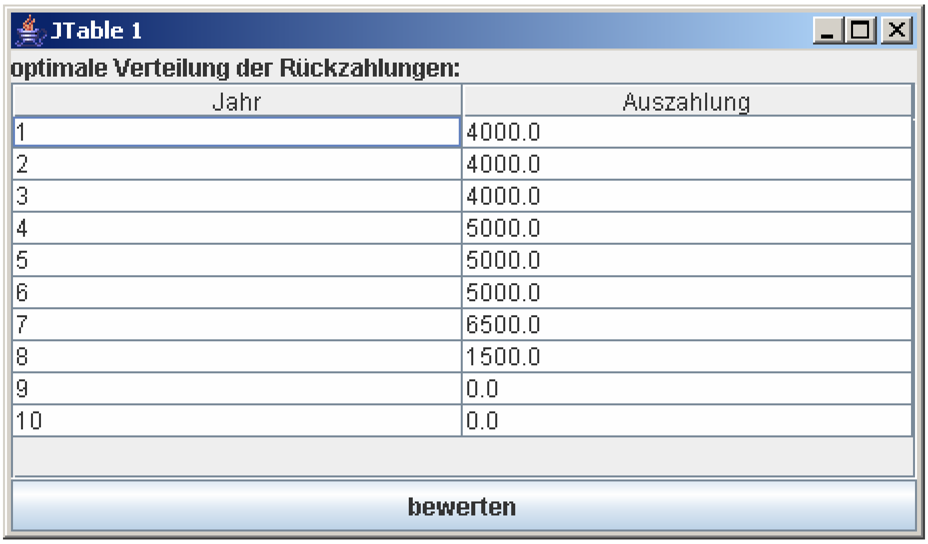
Zuerst muss man über die Eingabemasken die erforderlichen Daten eingeben:

Vorgegebenes Produkt

Beim vorgegebenen Produkt sind die Laufzeit, die Investitionssumme, die Höhe der Rückzahlungssumme und der verwendete Zinssatz ist vorgegeben. Man kann aus zwei Produkten wählen:

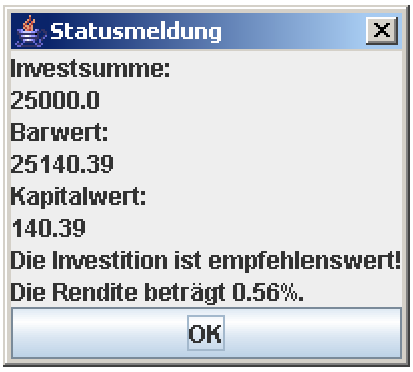


Nachdem ein Produkt ausgewählt wurde, wird die optimale Verteilung der einzelnen Auszahlungen automatisch vorgenommen. Hierbei ist es so, dass es für den Käufer eines solchen Finanzproduktes am vorteilhaftesten ist, wenn er sein Geld möglichst schnell zurückerhält. Dadurch ergibt sich bei Produkt 1 z.B. die folgende Verteilung, die bei Bedarf geändert werden kann:



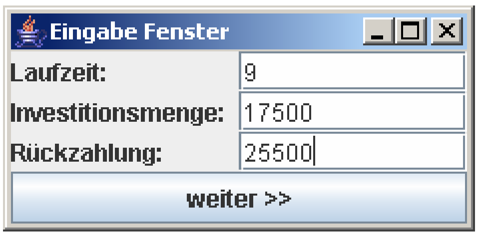
Jahr	Auszahlung
1	4000.0
2	4000.0
3	4000.0
4	5000.0
5	5000.0
6	5000.0
7	6500.0
8	1500.0
9	0.0
10	0.0

Um nun zu ermitteln, ob die Investition sinnvoll ist, wird nach Betätigung des „bewerten“-Buttons die Summe der Barwerte gebildet, diese von der Investitionssumme subtrahiert um den Kapitalwert der Investition zu ermitteln. Des Weiteren wird die Rendite berechnet, indem man den Barwert durch die Investitionssumme dividiert. Hierdurch erhält man den Faktor q, den man anschließend -1 rechnet um ihn dann mit 100 zu multiplizieren um den Prozentsatz der Investition zu erhalten.



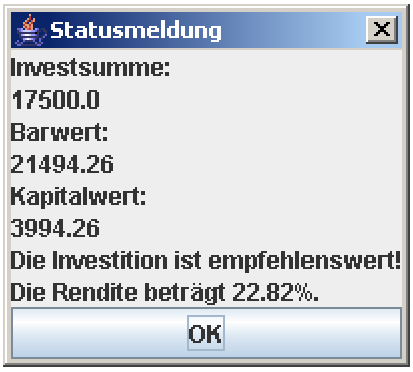
Selbstdefiniertes Produkt

Im Gegensatz zum vorgegebenen Produkt müssen beim Selbstdefinierten Produkt alle relevanten Werte von Hand eingegeben werden. Die Laufzeit, die Investitionssumme und die Höhe der Rückzahlungssumme werden in der folgenden Maske eingegeben:



Da die Höhen der Rückzahlungen von Finanzprodukt zu Finanzprodukt zum Teil sehr stark variieren können wird die Höhe der einzelnen Rückzahlungen in der nachfolgenden Maske vom Nutzer selbst eingegeben:

Um nun zu ermitteln, ob die Investition sinnvoll ist, wird nach Betätigung des „bewerten“-Buttons die Summe der Barwerte gebildet, diese von der Investitionssumme subtrahiert um den Kapitalwert der Investition zu ermitteln. Des Weiteren wird die Rendite berechnet, indem man den Barwert durch die Investitionssumme dividiert. Hierdurch erhält man den Faktor q, den man anschließend -1 rechnet um ihn dann mit 100 zu multiplizieren um den Prozentsatz der Investition zu erhalten.



Da bei diesem Produkt kein Zinssatz vorgegeben ist, wird dieser aus einem Array ausgelesen, das wie folgt aussieht:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Zinssatz	2	3	2	4	5	2	3	6	7	6	8	4	4	3	3	3	4	5	3	4

Jahr	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Zinssatz	5	5	4	3	5	6	1	7	6	4	3	2	5	6	5	4	6	4	5	3

Der verwendete Algorithmus

Da die optimale Verteilung der Rückzahlungen bei gegebenem statischen Zins, wie er bei den vorgegebenen Produkten gewählt ist, dahingehend trivial ist, dass man am Anfang der Laufzeit möglichst hohe Rückzahlungen anbringt benötigt man hierfür keinen speziellen Algorithmus.

Anders ist dies jedoch beim Bilden der Summe der Barwerte. Hierbei ist es möglich zwei verschiedene Algorithmen zu benutzen.
Zum einen, dass man jede Rückzahlung einzeln abzinst und daraus die Summe bildet:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \bullet q^n$$

Im vorgegeben Produkt 1 sähe das folgendermaßen aus:

$$Barwert = 4.000 \div 1{,}08 + 4.000 \div 1{,}08^2 + 4.000 \div 1{,}08^3 + 4.000 \div 1{,}08^4 + 5.000 \div 1{,}08^5 + 5.000 \div 1{,}08^6 + 6.500 \div 1{,}08^7 + 1.500 \div 1{,}08^8$$

$$Barwert = 25.410{,}39$$

Bei dem in der Dokumentation angegebenen selbstdefinierten Produkt ergibt sich die folgende Rechnung:

$$Barwert = (4.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02 \div 1{,}04 \div 1{,}05 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}06 \div 1{,}07)$$
$$+ (3.500 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02 \div 1{,}04 \div 1{,}05 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}06) + (3.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02 \div 1{,}04 \div 1{,}05 \div 1{,}02 \div 1{,}0$$
$$+ (3.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02 \div 1{,}04 \div 1{,}05) + (3.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02 \div 1{,}04) + (3.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03 \div 1{,}02)$$
$$+ (2.000 \div 1{,}02 \div 1{,}03) + (2.000 \div 1{,}02)$$

$$Barwert = 21.494{,}26$$

Da die Laufzeit dieser Vorgehensweise jedoch bei O(n²), wobei n die Laufzeit ist, liegt kann man den Algorithmus so umgestalten, sodass man nur n-mal addieren und ebenfalls n-mal dividieren muss. Dies ergibt eine Laufzeit von O(n), wobei n die Laufzeit ist, was in den späteren Tests nachgewiesen wird.
Das Vorgehen ist wie folgt:
Man Zinst die letzte Rate mit dem Zinssatz des entsprechenden Jahres ab und addiert die Rate des Vorjahres. Diese Summe zinst man nun wiederum mit dem Zinssatz des entsprechenden Jahres ab, etc.

```
while(i>=0){
      power++;
//Abzinsen
      q=p[i]/100+1;
      Object tmp = table.getValueAt(i,1);
      val=Double.parseDouble((String)tmp);
      val=val+barwert;
      barwert=val/q;
      i--;
}
```

Hierbei sind die Variablen, wie folgt belegt:

- p[] = Array mit Zinssätzen
- table = Auflistung der Rückzahlungen

Tests

Um die Laufzeit des obigen Algorithmus zu ermitteln wenden wir den Ratiotest an:

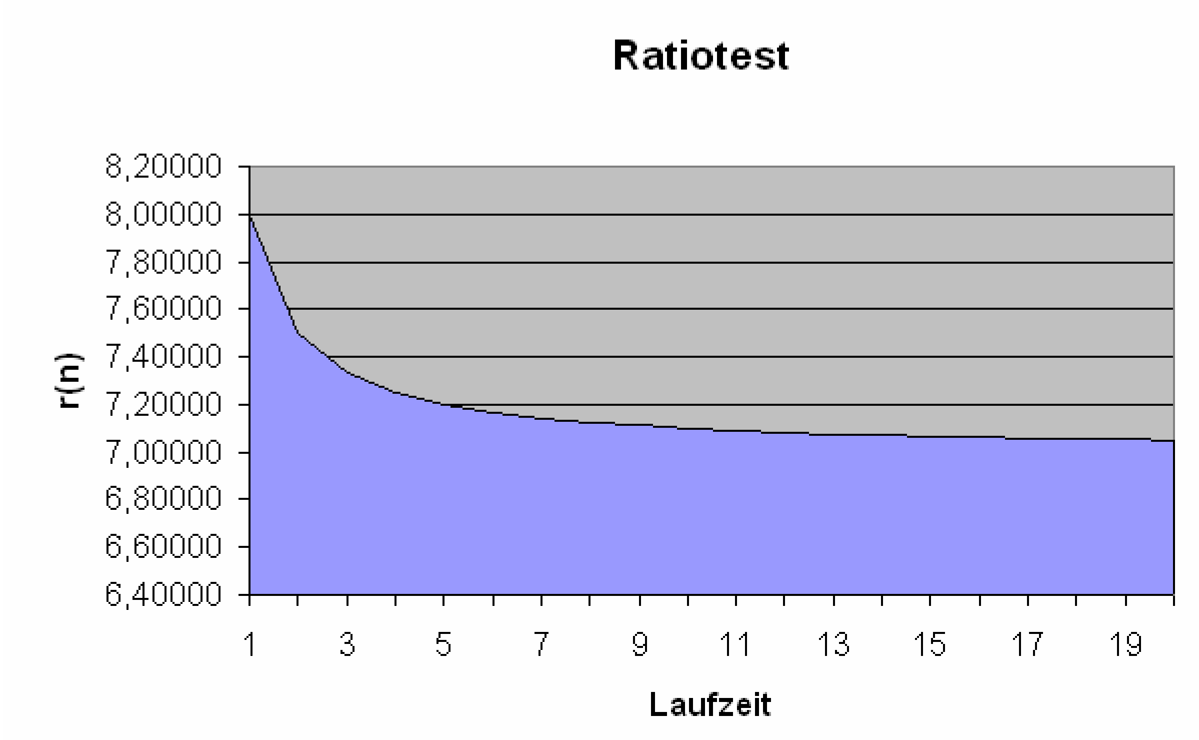
Das Ergebnis des Ratiotests ist wie folgt zu werten:

- Tendiert die Kurve des Dagramms gegen unendlich, so ist die Laufzeit zu klein geschätzt.
- Tendiert die Kurve des Diagramms gegen minus unendlich, so ist die Laufzeit zu groß geschätzt.
- Wenn die Kurve gegen eine Zahl konvergiert, so ist die Laufzeit richtig geschätzt.

Hierbei ist unsere geschätzte Laufzeit O(n).
Nachdem im Programm ein Zähler integriert wurde, der alle Elementaroperationen des Algorithmus zählt ergeben sich für die die unterschiedlichen Laufzeiten die folgende Wertetabelle:

Laufzeit	t(n)	f(n)	r(n)=t(n)/f(n)
1	8	1	8,00000
2	15	2	7,50000
3	22	3	7,33333
4	29	4	7,25000
5	36	5	7,20000
6	43	6	7,16667
7	50	7	7,14286
8	57	8	7,12500
9	64	9	7,11111
10	71	10	7,10000
11	78	11	7,09091
12	85	12	7,08333
13	92	13	7,07692
14	99	14	7,07143
15	106	15	7,06667
16	113	16	7,06250
17	120	17	7,05882
18	127	18	7,05556
19	134	19	7,05263
20	141	20	7,05000

Wenn man diese in einen Graphen plotten lässt, so erkennt man, dass die daraus resultierende Kurve gegen 7 konvergiert.



Da in dem obigen Graph die Kurve gegen die Zahl 7 konvergiert, ist die Laufzeit von O(n) richtig geschätzt.

Anhang

Historischer Auszug bez. Kapitalisierung

Die Form des zinstragenden Kapitals bringt es mit sich, daß jede bestimmte und regelmäßige Geldrevenue als Zins eines Kapitals erscheint, sie mag aus einem Kapital entspringen oder nicht. Erst wird das Geldeinkommen in Zins verwandelt, und mit dem Zins findet sich dann auch das Kapital, woraus es entspringt. Ebenso erscheint mit dem zinstragenden Kapital jede Wertsumme als Kapital, sobald sie nicht als Revenue verausgabt wird; nämlich als Hauptsumme (principal) im Gegensatz zum möglichen oder wirklichen Zins, den sie tragen kann.

Die Sache ist einfach: Gesetzt, der Durchschnittszinsfuß sei 5% jährlich. Eine Summe von 500 Pfd.St. würde also jährlich, wenn in zinstragendes Kapital verwandelt, 25 Pfd.St. einbringen. Jede feste jährliche Einnahme von 25 Pfd.St. wird daher als Zins eines Kapitals von 500 Pfd.St. betrachtet. Dies ist und bleibt jedoch eine rein illusorische Vorstellung, außer in dem Fall, daß die Quelle der 25 Pfd.St., sei diese nun ein bloßer Eigentumstitel resp. Schuldforderung oder sei sie ein wirkliches Produktionselement, wie etwa ein Grundstück, direkt übertragbar ist oder eine Form erhält, worin sie übertragbar wird. Nehmen wir als Beispiele Staatsschuld und Arbeitslohn.

Der Staat hat seinen Gläubigern jährlich ein gewisses Quantum Zins für das geborgte Kapital zu zahlen. Der Gläubiger kann hier nicht seinem Schuldner aufkündigen, sondern nur die Forderung, seinen Besitztitel darüber, verkaufen. Das Kapital selbst ist aufgegessen, verausgabt vom Staat. Es existiert nicht mehr. Was der Staatsgläubiger besitzt, ist 1. ein Schuldschein auf den Staat, sage von 100 Pfd.St.; 2. gibt dieser Schuldschein ihm den Anspruch auf die jährlichen Staatseinnahmen, d.h. das jährliche Produkt der Steuern, für einen gewissen Betrag, sage 5 Pfd.St. oder 5%; 3. kann er diesen Schuldschein von 100 Pfd.St. beliebig an andre Personen verkaufen. Ist der Zinsfuß 5%, und dazu Sicherheit des Staats vorausgesetzt, so kann der Besitzer A den Schuldschein in der Regel zu 100 Pfd.St. an B verkaufen; denn für B ist es dasselbe, ob er 100 Pfd.St. zu 5% jährlich ausleiht, oder ob er durch Zahlung von 100 Pfd.St. sich einen jährlichen Tribut vom Staat zum Betrage von 5 Pfd.St. sichert. Aber in allen diesen Fällen bleibt das Kapital, als dessen Abkömmling (Zins) die Staatszahlung betrachtet wird, illusorisch, fiktives Kapital. Nicht nur, daß die Summe, die dem Staat geliehen wurde, überhaupt nicht mehr existiert. Sie war überhaupt nie bestimmt, als Kapital verausgabt, angelegt zu werden, und nur durch ihre Anlage als Kapital hätte sie in einen sich erhaltenden Wert verwandelt werden können. Für den Originalgläubiger A repräsentiert der ihm zufallende Teil der jährlichen Steuer Zins von seinem Kapital, wie dem Wucherer der ihm zufallende Teil des Vermögens des Verschwenders, obgleich in beiden Fällen die geliehene Geldsumme nicht als Kapital verausgabt ward. Die Möglichkeit, den Schuldschein auf den Staat zu verkaufen, repräsentiert für A den möglichen Rückfluß der Hauptsumme. Was den B angeht, so ist von seinem Privatstandpunkt aus sein Kapital als zinstragendes Kapital angelegt. Der Sache nach ist er bloß an die Stelle von A getreten und hat dessen Schuldforderung auf den Staat gekauft. Diese Transaktionen mögen sich noch so sehr vervielfältigen, das Kapital der Staatsschuld bleibt ein rein fiktives, und von dem Moment an, wo die Schuldscheine unverkaufbar würden, fiele der Schein dieses Kapitals weg. Nichtsdestoweniger, wie wir gleich sehn werden, hat dies fiktive Kapital seine eigne Bewegung.

Im Gegensatz nun zum Kapital der Staatsschuld, wo ein Minus als Kapital erscheint - wie das zinstragende Kapital überhaupt die Mutter aller verrückten Formen ist, so daß z.B. Schulden in der Vorstellung des Bankiers als Waren erscheinen können -, wollen wir nun die Arbeitskraft betrachten. Der Arbeitslohn wird hier als Zins aufgefaßt und daher die Arbeitskraft als das Kapital, das diesen Zins abwirft. Ist z.B. der Arbeitslohn eines Jahrs = 50 Pfd.St. und steht der Zinsfuß auf 5%, so gilt die jährliche Arbeitskraft als gleich einem Kapital von 1.000 Pfd.St. Die Verrücktheit der kapitalistischen Vorstellungsweise erreicht hier ihre Spitze, indem statt die Verwertung des Kapitals aus der Exploitation der Arbeitskraft zu erklären, umgekehrt die Produktivität der Arbeitskraft daraus erklärt wird, daß Arbeitskraft selbst dies mystische Ding, zinstragendes Kapital ist. In der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts (z.B. bei Petty) war dies eine Lieblingsvorstellung, die aber auch heutzutage in allem Ernst teils von Vulgärökonomen, teils und hauptsächlich von deutschen Statistikern gebraucht wird Es treten hier leider zwei, diese gedankenlose Vorstellung unangenehm durchkreuzende Umstände ein, erstens, daß der Arbeiter arbeiten muß, um diesen Zins zu erhalten, und zweitens, daß er den Kapitalwert seiner Arbeitskraft nicht durch Übertragung versilbern kann. Vielmehr ist der jährliche Wert seiner Arbeitskraft gleich seinem jährlichen Durchschnittslohn, und was er ihrem Käufer durch seine Arbeit zu ersetzen hat, ist dieser Wert selbst plus dem Mehrwert, der Verwertung desselben. Im Sklavensystem hat der Arbeiter einen Kapitalwert, nämlich seinen Kaufpreis. Und wenn er vermietet wird, hat der Mieter erstens den Zins des Kaufpreises zu zahlen und obendrein den jährlichen Verschleiß des Kapitals zu ersetzen.

Die Bildung des fiktiven Kapitals nennt man kapitalisieren. Man kapitalisiert jede regelmäßig sich wiederholende Einnahme, indem man sie nach dem Durchschnittszinsfuß berechnet, als Ertrag, den ein Kapital, zu diesem Zinsfuß ausgeliehen, abwerfen wurde; z.B. wenn die jährliche Einnahme = 100 Pfd.St. und der Zinsfuß = 5%, so wären die 100 Pfd.St. der jährliche Zins von 2.000 Pfd.St., und diese 2.000 Pfd.St. gelten nun als der Kapitalwert des juristischen Eigentumstitels auf die 100 Pfd.St. jährlich. Für den, der diesen Eigentumstitel kauft, stellen die 100 Pfd.St. jährliche Einnahme dann in der Tat die Verzinsung seines angelegten Kapitals zu 5% vor. Aller Zusammenhang mit dem wirklichen Verwertungsprozeß des Kapitals geht so bis auf die letzte Spur verloren, und die Vorstellung vom Kapital als einem sich durch sich selbst verwertenden Automaten befestigt sich.

Marx, K., Das Kapital. Kritik der politischen Ökonomie. Dritter Band. Buch III: Der Gesamtprozeß der kapitalistischen Produktion. In: Marx/Engels Werke, Bd. 25, Berlin 1976, S. 482 ff.