Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne

Algorithmische Anwendungen WS 2005/2006

Themengebiet: **Lineare Programmierung**

Thema: **Das Transportproblem**

Gruppe: **F_Blau_Ala0506**

Olga Klassen 11036923
Houda Bennani 11038778

Datum: **26.01.2006**

Inhaltsverzeichnis:

1. Das Tranportproblem

Das Transportproblem ist eine Fragestellung aus dem Operations Research: Wie findet man einen optimalen, d.h. kostenminimalen Plan zum Transport einheitlicher Objekte von mehreren Angebots- zu mehreren Nachfrageorten. Wobei es sind die vorhandenen und zu liefernden Mengen an die einzelnen Standorten gegeben, sowie die jeweiligen Transportkosten pro Einheit zwischen allen Standorten bekannt.
Bei einem Standardfall, einer bezüglich der Transportmengen linearen Kostenfunktion, handelt es sich um ein Problem der linearen Optimierung, für das, neben den Standardmethoden wie Simplex-Verfahren spezielle Lösungsalgorithmen existieren. Als eines der ersten Themengebiete des Operation Research wurde das Problem schon 1939 von Kantorovich als mathematisches Modell formuliert. In den 50er Jahren entwickelten Danzig, Charnes und Cooper, sowie Ford und Fulkerson verschiedene Lösungsalgorithmen.

Das klassische Transportproblem ohne Kapazitätsbeschränkungen auf den Transportwegen ist ein Spezialfall des kapazierten Transportproblems, das für Wege Mindest- oder Höchsttransportmengen festlegt. Klassisches und kapaziertes Transportproblem sind wiederum Spezialfälle des (kapazierten) Umladeproblems, bei dem es neben Angebots- und Nachfrageorten noch reine Umladeorte gibt. Ein Sonderfall des Transportproblems ist das Zuordnungsproblem.

Die erstmalige Formulierung von Transportproblemen wird üblicherweise Kantorovich, Hitchcock, und anderen zugeschrieben, die entsprechende Untersuchungen in den 40er-Jahren des vergangenen Jahrhunderts durchführten.
Allerdings wurde bereits im Jahr 1930 von A.N. Tolstoi ein Artikel veröffentlicht, in dem er das Transportproblem beschreibt sowie u.a. einen Lösungsansatz definiert, wonach eine optimale Lösung keinen Kreis mit negativen Kosten im Residualgraphen enthält. Tolstoi hat seine Untersuchungen anhand der Güterbeförderung auf dem Schienennetz der ehemaligen Sowjetunion durchgeführt und konnte ein für die damalige Zeit großes Transportproblem mit 10 Sourcen und 68 Destinationen optimal lösen.

Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch (* 19.01.1912 in St. Petersburg; † 7.04.1986 in Moskau) wurde 1975 der Nobelpreis für Wirtschaft verliehen. Diesen teilte er mit Tjalling Koopmans für "Die Beiträge zur Theorie für die optimale Zuteilung von Betriebsmitteln" ("contributions to the theory of optimum allocation of resources").
Kantorowitsch arbeitete für die sowjetische Regierung. Er wurde mit der Aufgabe zur Optimierung der Produktion einer Furnierholzfabrik betraut. Woraufhin er eine mathematische Methode entwickelte, die als lineare Programmierung bekannt ist. Er schrieb einige Bücher, einschließlich "Die mathematische Methode der Produktionsplanung und Organisation und den besten Gebrauch von ökonomischen Betriebsmitteln" ("The Mathematical Method of Production Planning and Organization and The Best Uses of Economic Resources").

2. Anwendung

Angewandt wird das Transport Problem in der Logistik. Es ermöglicht die Erstellung eines Transportplanes mit optimalen Transportkosten.

Die Verteilung leerer Güterwaggons stellt ein aus betriebswirtschaftlicher Sicht interessantes Optimierungsproblem dar, nicht zuletzt weil jede Bahngesellschaft daran interessiert ist, die Anzahl der Leerfahrten zu minimieren.

Formuliert man die Aufgabe als Transportproblem mit m Ausgangs- und n Zielorten, wobei die »Anbieter« A_i am Abend eines Tages eine Anzahl von Waggons in ihren Bahnhöfen stehen haben, die am nachfolgenden Tag von den »Nachfragern« B_j benötigt werden. Die Waggons müssen im so genannten Nachtsprung verschoben werden. Hauptziel ist: Die Deckung aller Bedarfe und damit die maximale Zufriedenheit der Kunden.

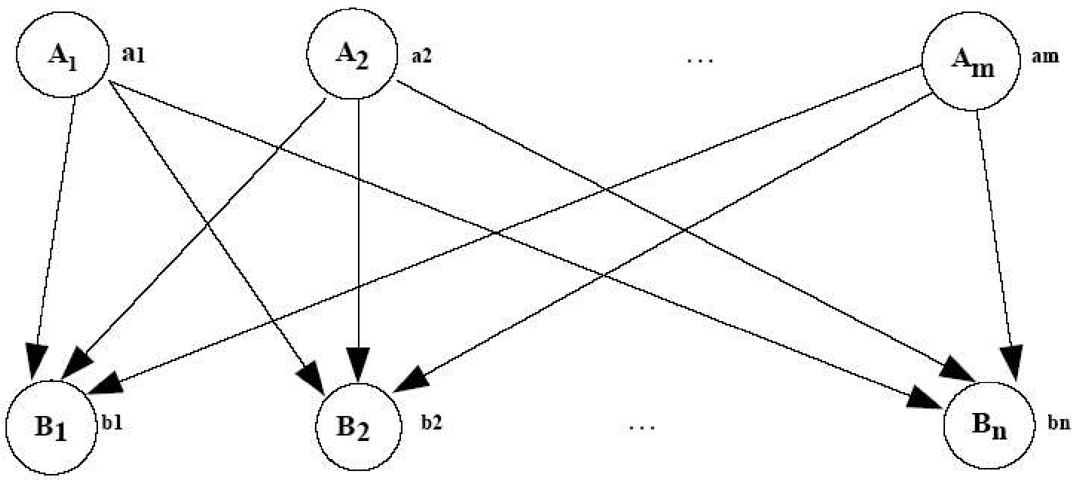
3. Theorie

3.1. Problemmstellung:

Es geht darum, Waren von einer bestimmten Anzahl von Quellen, zu einer bestimmten Anzahl von Zielen zu transportieren. Dabei steht an jeder Quelle ein bestimmter Vorrat an Ware zur Verfügung und jedes Ziel hat einen bestimmten Bedarf an dieser Ware. Bei den Waren handelt es sich nur um eine Art von Ware, es wird also nicht zwischen verschiedenen Arten von Waren unterschieden. Auf diese Weise ist es irrelevant, von welcher Quelle ein Ziel seine Waren bezieht. Ein Ziel kann deshalb seinen Bedarf auch von mehreren Quellen decken.
Der Transport einer Ware von einer Quelle zu einem Ziel verursacht gewisse Kosten. Diese Kosten werden als Transportkosten bezeichnet. Man summiert die Transportkosten für alle Warenflüsse und somit erhält man die gesamten Transportkosten für diese Lösung des Transportproblems. Das Ziel ist nun einen Transportplan, für ein vorgegebenes Transportproblem zu erstellen, so dass die gesamten Transportkosten möglichst niedrig sind. Dabei sind bestimmte Punkte zu beachten. Zum Einen können von einer Quelle natürlich nur so viele Waren abtransportiert werden, wie an dieser Quelle Waren als Vorräte zur Verfügung stehen. Zum Anderen müssen mindestens so viel Waren zu einem Ziel transportiert werden, dass dessen Bedarf gedeckt wird.

3.2. Grundmodell:

Beim Grundmodell des Transportproblems wird die folgende Entscheidunggssituation betrachtet :
Von den Lieferanten **A1, A2, ..Am**
sollen die Vorratsmengen **a1, a2, .., am**
zu den n Verbrauchersorten **B1, B2, .., Bn**
mit den Bedarfsmengen **b1, b2, .. bn**
kostenminimal transportiert werden, wobei pro von **Ai** nach **Bj** transportierter Mengeneinheit die Kosten von **Cij** entstehen.
Die Abbildung unten macht diese Situation veranschaulich.



Da von jedem Lieferort Ai (i=1, ..., m) zu jedem Bedarfsort Bj (j=1, ..., n) die Transportmenge Cij bestimmt werden soll, ist die Anzahl der Entscheidungsvariablen gleich n*m. Eine Kompakte Darstellung aller im Transportmodell auftretenden Konstanten und Variablen geschieht durch die so genannte Transportmatrix .

3.3. Lösungsansatz:

Ein Transportproblem ist gegeben durch eine Menge von *m* Quellen und *n* Zielen. Der Vorrat einer Quelle ***i*** (i = 1,.., *m*) ist durch source(*i*) gegeben. Der Bedarf eines Ziels ***j*** (*j* = *1*,..,*n*) ist durch dest(*j*) gegeben. Eine (*m*×*n*) Matrix V, die den Transportplan enthält, stellt eine Lösung des Transportproblems dar.
Jede Matrix dieser Form, deren Elemente reelle Zahlen sind, kann eine Lösung des Transportproblems sein.
Jedes Element *xij* der Matrix V gibt an, wie viele Einheiten der Ware von Quelle *i* nach Ziel *j* transportiert werden sollen.

Bei dem Tranportproblem unterscheiden wir zwei Fällen:

Ausgeglichener Fall:
Summe der Vorräte der Quellen gleich der Summe des Bedarfs aller Ziele.

Unausgeglichener Fall:

a) Wenn die Summe der Vorräte der Quellen größer als die Summe des Bedarfs ist

$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$ dann bleibt die Anzahl der Vorräte der Größe in den Lagern.

In diesem Fall führt man ein fiktives Ziel *n+1* mit dem Bedarf $\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$

ein und setzt die Transportkosten $p_{i,n+1}$ gleich 0 für alle *i.*

b) Wenn die Summe des Bedarfs die Summe der Vorräte der Quellen überschreitet

$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$ dann können die Bedürfnisse nicht gedeckt werden.

Dieses Problem kann man lösen, indem man eine fiktive Quelle *m+1* mit dem Vorrat

$\sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n} a_j$ einfügt und die Transportkosten von der Quelle zum Ziel gleich 0 setzt.

Die Lösung des Tranportproblems besteht aus drei Schritten:

1. Erstellung eines so genannten Grundplans einer Anfangsmatrix. Dies geschieht mit Hilfe des **Nord-West Winkel Verfahrens**
2. Berechnung der **Potentiale** und der **Pseudopreisen**
3. Erstellung von **Zyklen**

Grundplan:

Die Lösung des Transportproblems beginnt mit der Erstellung eines „Grundplanes“. Dafür benutzen wir das Verfahren des Nord-West Winkels.
Das Verfahren sieht folgerndermassen aus: Als erstes wird eine Tabelle erstellt, die alle gegebe Daten enthält:

Quellen ($A_1 \ldots A_m$)

Ziele ($B_1 \ldots B_n$)

Vorräte (a_i)

Bedarf (b_j)

Transportkosten (C_{ij})

Ziele / Quellen	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Vorräte a_i
A_1	10	8	5	6	9	48
A_2	6	7	8	6	5	30
A_3	8	7	10	8	7	27
A_4	7	5	4	6	8	20
Bedarf b_j	18	27	42	12	26	125

3.3.1. Verfahren des Nord-West Winkels:

Die Daten tragen wir in die Tabelle ein, angefangen in der oberen linken Zelle (Nord-West Winkel der Tabelle).
Wir gehen folgend vor:
Ziel B_1 hat einen Bedarf von 18 Wareneinheiten gemeldet. Diesen Bedarf decken wir aus den 48 Wareneinheiten des Vorrats der Quelle A_1 und schreiben in der Zelle (1,1) den Transport von 18 Wahreneinheiten. Damit ist der Bedarf des Zieles B_1 gedeckt und in Quelle A_1 bleiben noch 30 Wahreneinheiten. Decken wir damit den Bedarf des Zieles B_2 (27 Einheiten) und schreiben 27 in Zelle (2,1). Die restlichen 3 Einheiten der Quelle A_1 schreiben wir dem Ziel B_3 gut. Dabei bleiben bei Ziel B_3 noch 39 Einheiten nicht gedeckt. Decken wir 30 von denen aus der Quelle A_2, womit die Vorräte dieser Quelle ausgeschöpft sind und die restlichen 9 Einheiten nehmen

wir aus der Quelle A_3. Aus den restlichen 18 Einheiten der Quelle A_3 geben wir 12 dem Ziel B_4; restliche 6 Einheiten gehen zum Ziel B_5, was mit den ganzen 20 Einheiten der Quelle A_4 seinen Bedarf vollständig deckt. Damit ist die Verteilung der Daten auf die Tabelle geschafft. Alle Ziele haben ihre Wahre erhalten so dass der Bedarf genau gedeckt wurde. Das sieht man an der Summe der Transporte in jeder Zeile, die gleich den dazugehörigen Vorräten ist.

Ziele Quellen	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Vorräte a_i
A_1	10 18	8 27	5 3	6	9	48
A_2	6	7	8 30	6	5	30
A_3	8	7	10 9	8 12	7 6	27
A_4	7	5	4	6	8 20	20
Bedarf b_j	18	27	42	12	26	125

Basiszelle

Der von uns erstellte Transportplan ist in Bezug auf Kosten nicht optimal, da wir bei der Erstellung die Kosten überhaupt nicht berücksichtigt haben.

3.3.2. Berechnung der Potentiale und Pseudopreisen:

Die Zellen der Tabelle die einen Wahreneintrag enthalten sind die **Basiszellen C_{ij}** . (Wahreneinheit ist hier blau gekennzeichnet). Die Anzahl der Basiszellen muss *m+n-1* sein. Wenn die Anzahl der Basiszellen zu klein ist, fügen wir in eine der freien Zellen eine null hinzu.

Stellen wir uns nun vor, dass jeder der Quellen A_i sich an einem Teil der Transportkosten mitbeteiligt: Beteiligung=α_i (egal zu welchem Ziel). Seinerseits beteiligt sich jedes Ziel B_i an den Kosten ebenfalls mit β_j . Diese Zahlungen werden einem Dritten übergeben („einem Fährmann").

α_i und β_j sind die Potentiale der Transportmatrix.

Nun rechnen wir $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ (i=1..m, j=1..n) und nennen c_{ij} "Pseudokosten" des Transports der Wahreneinheit von A_i nach B_j. Diese Werte müssen nicht zwingend positiv sein.

Jetzt können wir zwischen den "Pseudokosten" c_{ij} und den reellen Transportkosten einen Bezug herstellen. Mit Hilfe der Basiszellen erstellen wir für alle Potenziale folgende Gleichungen $C_{ij} = \alpha_i + \beta_j$.

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem mit folgenden Gleichungen:
(Da wir 9 Unbekannten und nur 8 Gleichungen haben setzten wir eine Unbekannte gleich 0)

$a_1 = 0$,
$b_1 = 10$, da $a_1 + b_1 = C_{11} = 10$,
$b_2 = 8$, da $a_1 + b_2 = C_{12} = 8$,
$b_3 = 5$, da $a_1 + b_3 = C_{13} = 5$,
$a_2 = 3$, da $a_2 + b_3 = C_{23} = 8$,
$a_3 = 5$, da $a_3 + b_3 = C_{33} = 10$,
$b_4 = 5$, da $a_3 + b_4 = C_{34} = 8$,
$b_5 = 5$, da $a_3 + b_5 = C_{35} = 7$,
$a_4 = 5$, da $a_4 + b_5 = C_{45} = 8$.

Nachdem alle Potentiale errechnet sind, können wir die Pseudokosten für alle Basiszellen bestimmen. Dabei sind für uns nur die „nicht-Basiszellen" interessant.

Ziele / Quellen	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	10 18	8 27	5 3	6 c=3	9 c=2	0
A_2	6 c=13	7 c=11	8 30	6 c=6	5 c=5	3
A_3	8 c=15	7 c=13	10 9	8 12	7 6	5
A_4	7 c=16	5 c=14	4 c=11	6 c=9	8 20	6
β_j	10	8	5	3	2	

Abbruchbedingung:

Der Transportplan ist optimal, wenn in allen Matrixzellen der Pseudopreis den Reellenpreis nicht überschreitet.

alle Basiszellen $C_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$

alle freien Zellen $C_{ij} \geq \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$

Trifft dieses nicht zu, muss man mit Hilfe von Zyklen den Plan optimieren. Wir nehmen dafür die Nichtbasis-Zellen für die, die Bedingung $C_{ij} \geq c_{ij}$ nicht erfüllen.

Da wir aber mehrere Fälle haben, in denen der Pseudopreis den reellen Preis überschreitet, müssen wir uns für eine der Zellen entscheiden. Dazu bauen wir für alle Zellen den Zyklus und wählen den optimalen aus. Man wählt einen Zyklus aus, bei dem das Produkt des reellen Preises und der Mengeneinheit der zu "verschiedenen" Basiszelle am größten ist.

3.3.3 Zyklen

Bildlich gesehen verschieben wir eine bestimmte Basiszelle in einem Zyklus in der Matrix. Addieren und subtrahieren dabei ihren Wert von den Basiszellen auf denen der Zyklus sich aufbaut. Diese Basiszelle wird nach dem Durchlauf des Zyklen zu einer "leeren" Matrixzelle, d.h. eine Zelle, die mit keinen Wahreneinheiten belegt ist. Sie gibt ihren Wert an die Matrixzelle, mit der wir starten ab. Somit erhalten wir eine neue Verteilung der Basiszellen in der Matrix.

Um den Zyklus aufzubauen, nehmen wir zum Beispiel die Zelle (2,1) und markieren es mit + (wir werden später Wareneinheiten zu dieser Zelle dazu addieren) .

Nun müssen wir darauf achten, wenn wir zu dieser Zelle etwas addieren, dass die "Ballance" der Zeilen und der Spalten nicht gestört wird, das heißt die Summe der Bedürfnisse und der Vorräte darf nicht verändert werden.

Die zu "verschiedende Basiszelle" ist in diesem Fall die 18 (1,1). Wir wählen die Basiszelle aus, bei der der Betrag der Wahrneinheiten am niedrigsten ist.

Hierbei beachten wir nur die Basiszellen und die markierte Matrixzelle. Wir markieren die Basiszellen mit "+" oder "-" um Wareneinheiten dazu zu addieren oder subtrahieren.

Am besten zeigen wir das an unserem Beispiel:

Ziele / Quellen	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	10 - 18	8 27	5 + 3	6 c=3	9 c=2	0
A_2	6 + c =13	7 c=11	8 - 30	6 c=6	5 c=5	3
A_3	8 c=15	7 c=13	10 9	8 12	7 6	5
A_4	7 c=16	5 c=14	4 c=11	6 c=9	8 20	6
β_j	10	8	5	3	2	

Der entstandene Zyklus ist hier mit grünen Linien gekennzeichnet.

Nun kommt die gleiche Prozedur noch einmal:

Berechnen von Pseudokosten

Vergleichen von Pseudokosten und den reellen Kosten

falls Pseudokosten größer als reelle Kosten – Zyklus bauen

Wir überspringen die eitere Zyklen und zeigen die Transportmatrix, die sich ergibt wenn die Abbruchbedingung

alle Basiszellen $C_{ij} = \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$

alle freien Zellen $C_{ij} \geq \alpha_i + \beta_j = c_{ij}$

zutrifft und vergleichen die Transportkosten des Grundplanes und der Endmatrix:

Die Transportkosten des Grundplanes erstellt mit dem Verfahren des Nord-West Winkels betragen **1039**.

Die Transportkosten des bearbeiteten Planes betragen **703**.

Das Endergebnis: ($C_{ij} \geq c_{ij}$ trifft auf alle Zellen zu)

Ziele Quellen	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	10 c=6	8 c=5	**5** 36	**6** 12	9 c=5	*0*
A_2	**6** 18	7 c=5	8 c=5	6 c=6	**5** 12	*0*
A_3	8 c=8	**7** 13	10 c=7	8 c=8	**7** 14	*2*
A_4	7 c=6	**5** 14	**4** 6	6 c=6	8 c=5	*0*
β_j	*6*	*5*	*5*	*6*	*5*	

4. Laufzeitbestimmung:

Die Laufzeit des Tranportproblems ist exponentiell. Aus diesem Grund haben wir uns für die Asymptotische Laufzeitanalyse entschieden. Die Bearbeitung grosser Datenmengen, die wir für die experimentelle Laufzeitanalyse brauchen hätte sehr viel Rechenzeit benötigt.

WorstCase Ananlyse:

Das Tranportproblem teilt sich in drei Schritte auf:

- Der Aufbau des Grundmodels oder der Startmatrix
- Ermittlung der Potentiale
- Zyklen

Für die Bestimmung der Laufzeit des Algorithmus spielen die Iterationen eine große Rolle. Da das Nord-West-Winkel Verfahren nur ein einziges Mal am Anfang stattfindet, kann es außer Acht gelassen werden. Es hat auf die Laufzeitanalyse keinen großen Einfluss.

Interessant bei der Performance sind jedoch die Iterationen, die sich aus der Ermittlung der Potentiale und der Zyklen zusammensetzen.
Als erstes betrachten wir die Laufzeit der Potentialberechnung. Um die Potentiale zu berechnen muss man jede Matrixzelle durchlaufen, deswegen ist die Anzahl der Schritte in WorstCase **O(m*n).**
Als Nächstes ist für uns die Laufzeit des Zykluses in WorstCase interessant.
Ein Zyklus baut sich rekursiv auf den Basiszellen auf. Die maximale Anzahl der Elemente eines Zykluses ist die maximale Anzahl der Basiszellen: **O(m+n-1)**.
Mittels Kombinatorik können wir die Laufzeit der Iterationen bestimmen. Denn sie ist gleich der Anzahl der Iterationen:

$$O\binom{m*n}{m+n-1}$$

Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe der **Binomialkoeffizienten** umschreiben:

$$\frac{(m*n)!}{(m+n-1)!(m*n-m-n+1)!}$$

und mit Hilfe der Stirling-Formel vereinfachen:

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$$

$$n! = e^{n*\ln(n)-n}$$

Wenden wir das auf unseren Ausdruck an, so erhalten wir nach dem Ausrechnen und Vereinfachen $O(e^{m*n})$.

Gesamtlaufzeit des Algorithmus in WorstCase besteht aus der Laufzeit der Iteration multipliziert mit Anzahl der Iterationen: $O(m*n\ e^{m*n})$

Für uns ist aber nur der letzte Teil relevant. Das heißt die Laufzeit des Tranportproblems in WorstCase ist exponentiell $O(e^{m*n})$.

Ein berühmter mathematischer Beispiel der linearen Optimerung ist Danzigs SimplexMethode, der ebenfalls eine WorstCase Laufzeit von $O(e^n)$ aufweist. Trotzdem ist es eine der erfolgreichsten Methoden der linearen Optimierung.

Die Praktische Anwendung zeigt nach der Arbeit von V. Klee and G.J. Minty („How good is the simplex algorithm?") eine Laufzeit von etwa $O(n^3)$.

Das können wir bei dem Transportproblem anwenden.

5. Literatur

- Tolstoi, A.N.: Metody nakhojdeniya naimen'shego summovogo kilometrazha pri planirovanii perevozok v prostranstve [Russian; Methods of finding the minimal total kilometrage in cargotransportation planning in space]. 1930

- Leonid Kantorovich (russische Mathematiker):"Mathematische Methoden in der Organisation und Planung der Produktion die lineare Optimierung". 1939

- Hitchcock, F.L.: „The distribution of a product from several sources to numerous localities“ [Journal of Mathematics and Physics 20, 224-230]. 1941

- Die Formulierung der Aufgabe und des Theorems:

Kantorovich, L.V.: „O peremeshchenii mass“ [Russian]. Doklady Akademii Nauk SSSR 37 (7-8),227-230. [English translation (1942): On the translocation of masses. Comptes Rendus (Doklady) de l'Akádemie des Sciences de l'U.R.S.S. 37, 199-201;[reprinted (1958): Management Science 5, 1-4]]. 1942

- V. Klee and G.J. Minty: „How good is the simplex algorithm?“ In: Inequalities-III, ed. O. Shisha (Academic Press, New York, 1972) 159—175. 1972