

Übung 1

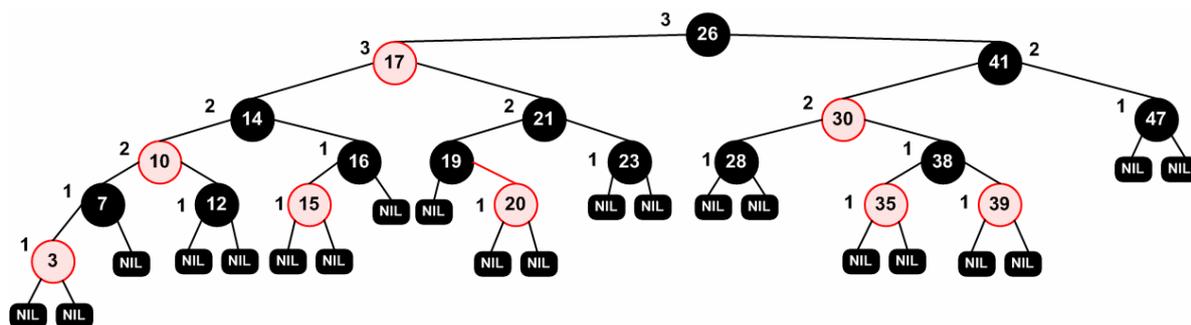
09.10.2007

Aufgabe 1

Zeichnen Sie einen vollständigen binären Suchbaum der Höhe 3 für die Schlüssel $\{1, 2, \dots, 15\}$. Fügen Sie NIL-Blätter hinzu und färben Sie die Knoten auf drei verschiedene Arten, so dass die Schwarztiefen der resultierenden Rot-Schwarz-Bäume 2, 3 und 4 betragen.

Aufgabe 2

Zeichnen Sie den Rot-Schwarz-Baum, der sich durch die Ausführung von Tree-Insert(36) auf den folgenden Baum ergibt.



Wenn der eingefügte Knoten rot gefärbt wird, ist dann der daraus resultierende Baum ein Rot-Schwarz-Baum?

Was ist, wenn der Knoten schwarz gefärbt wird?

Aufgabe 3

Angenommen, wir definieren einen so genannten *relaxierten Rot-Schwarz-Baum* als einen Suchbaum, welcher die Rot-Schwarz-Eigenschaften 1, 3, 4 und 5 erfüllt. Mit anderen Worten, die Wurzel des relaxierten RS-Baumes darf rot oder schwarz sein.

Betrachte einen relaxierten Rot-Schwarz-Baum T, dessen Wurzel rot ist. Angenommen, wir färben die Wurzel von T schwarz und nehmen sonst keine anderen Änderungen an dem Baum vor. Ist dieser Baum dann immer noch ein Rot-Schwarz-Baum?

Rot-Schwarz-Eigenschaften:

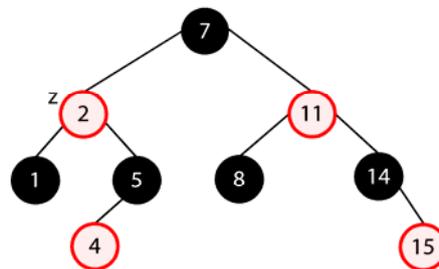
1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. **Wurzeleigenschaft:** Die Wurzel ist schwarz.
3. **Blatteigenschaft:** Jedes Blatt (NIL) ist schwarz.
4. **Innere-Knoten-Eigenschaft:** Die Kinder eines roten Knotens sind schwarz.
5. **Tiefeigenschaft:** Alle Blätter haben dieselbe „Schwarztiefe“, das bedeutet: alle Pfade von einem Knoten zu nachfolgenden Blättern haben dieselbe Anzahl schwarzer Knoten. (Die Anzahl der schwarzen Knoten wird auch als Pseudotiefe bezeichnet).

Aufgabe 4

Angenommen, wir absorbieren jeden roten Knoten in einem Rot-Schwarz-Baum in seinen Vaterknoten, so dass die Kinder des roten Knotens zu Kindern des schwarzen Vaterknotens werden (die Schlüssel ignorieren wir). Welches sind die möglichen Degrees eines schwarzen Knotens, nachdem alle seine roten Kinder absorbiert wurden? Was lässt sich in dem resultierenden Baum über die Tiefe der Blätter sagen?

Aufgabe 5

Gegeben ist folgender Rot-Schwarz-Baum:



- Fügen Sie den Schlüssel 9 ein und prüfen Sie die Rot-Schwarzeigenschaften. Tracen Sie die Pseudocodes der Funktionen RB-INSERT und RB-INSERT-FIXUP.
- Fügen Sie in den neuen Baum den Schlüssel 17 ein. Tracen Sie ebenfalls die Pseudocodes der Funktionen RB-INSERT und RB-INSERT-FIXUP. Zeichnen Sie die RS-Bäume, auch eventuelle Zwischenschritte.

Hinweis: Beachten Sie, dass in der then-Klausel von RB-INSERT-FIXUP (Zeilen 3-14) *left* und *right* vertauscht werden müssen, falls $p[z]$ rechter (und nicht linker) Sohn seines Vaters $p[p[z]]$ ist. Siehe auch Zeile 15.

Aufgabe 6

Welches ist die größte Anzahl von inneren Knoten in einem Rot-Schwarz-Baum mit der Schwarztiefe k ? Welches ist die kleinste mögliche Anzahl?

Aufgabe 7

Beschreiben Sie einen Rot-Schwarz-Baum mit n Schlüsseln, welcher das größte mögliche Verhältnis von roten inneren Knoten zu schwarzen inneren Knoten realisiert. Wie lautet dieses Verhältnis? Welcher Baum hat das kleinste Verhältnis, und wie lautet dieses Verhältnis?