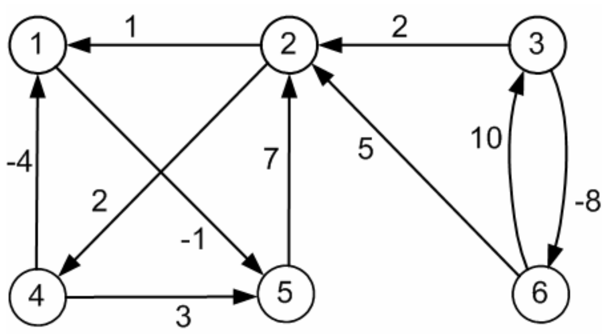
Übung 7

04.12.2007

Aufgabe 1

Wenden Sie den Algorithmus SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS auf den folgenden gerichteten Graphen an. Geben Sie die Matrizen an, die nach jeder Iteration des for-Loops in den Zeilen 3-4 entstehen. Machen Sie dasselbe mit dem Algorithmus FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS.



SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (*W*)

1 n ← rows[*W*]
2 $L^{(1)} \leftarrow W$
3 **for** m ← 2 to n-1
4 **do** $L^{(m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS($L^{(m-1)}$, *W*)
5 **return** $L^{(n-1)}$

FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (*W*)

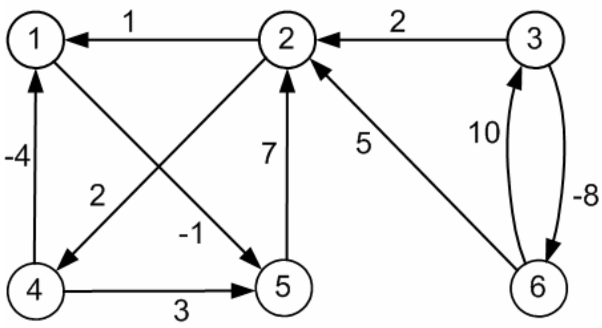
1 n ← rows[W]
2 $L^{(1)} \leftarrow W$
3 m ← 1
4 **while** m < n-1
5 **do** $L^{(2m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS($L^{(m)}$, $L^{(m)}$)
6 m ← 2m
7 **return** $L^{(m)}$

EXTEND-SHORTEST-PATHS (*L*, *W*)

1 n ← rows[L]
2 sei $L' = (l'_{ij})$ eine n × n – Matrix.
3 **for** i ← 1 **to** n
4 **do for** j ← 1 **to** n
5 **do** $l'_{ij} \leftarrow \infty$
6 **for** k ← 1 **to** n
7 **do** $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
8 **return** L′

Aufgabe 2

Wenden Sie den Algorithmus FLOYD-WARSHALL auf den folgenden gerichteten Graphen an. Geben Sie die Matrizen $D^{(k)}$ an, die nach jeder Iteration des äußeren for-Loops Zeilen 3-6 entstehen. Geben Sie ebenfalls die $\Pi^{(k)}$-Matrizen an, die nach der Definition von $\pi_{ij}^{(k)}$ entstehen.



$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} NIL & \text{if } i = j \text{ oder } w_{ij} = \infty \\ i & \text{if } i \neq j \text{ und } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

```
FLOYD-WARSHALL(W)
1  n ← rows[W]
2  D(0) ← W
3  for k ← 1 to n
4    do for i ← 1 to n
5         do for j ← 1 to n
6               do dij(k) ← min (dij(k-1), dik(k-1) + dkj(k-1))
8  return D(n)
```

Aufgabe 3

Zeichnen Sie zur Lösung $D^{(5)}$ von Aufgabe 2 die Vorgängerbäume der Knoten 4 und 5.

Aufgabe 4

Berechnen Sie zu folgendem Graphen G = (V, E) mit G = {1, 2, 3, 4}, E = {(4,1), (4,3), (3,2), (2,3), (2,4)} die transitive Hülle. Notieren Sie alle Matrizen $T^{(k)}$, k = 1, ..., 4, die nach jeder äußeren for-Schleife (Zeilen 7-10) entstehen.

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & if\ i \neq j \text{ und} (i,j) \notin E \\ 1 & if\ i = j \text{ oder} (i,j) \in E \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$$

TRANSITIVE-CLOSURE**(G)**

```
1   n ← |V[G]|
2   for i ← 1 to n
3     do for j ← 1 to n
4         do if i = j or (i, j) ∈ E[G]
5                 then  t_ij(0) ← 1
6                 else  t_ij(0) ← 0
7   for k ← 1 to n
8     do for i ← 1 to n
9         do for j ← 1 to n
10              do t_ij^(k) ← t_ij^(k-1) ∨ t_ik^(k-1) ∧ t_kj^(k-1))
11  return T^(n)
```