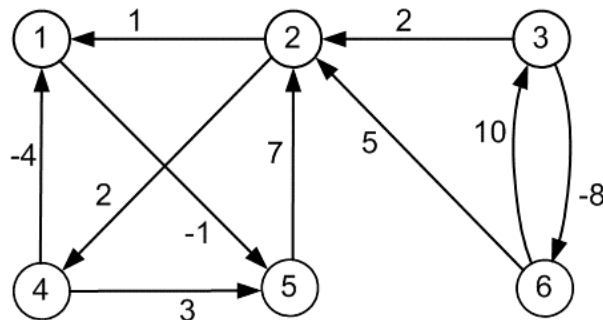


All Pairs Shortest Paths

Aufgabe 1

Wenden Sie den Algorithmus SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS auf den folgenden gerichteten Graphen an. Geben Sie die Matrizen an, die nach jeder Iteration des for-Loops in den Zeilen 3-4 entstehen. Machen Sie dasselbe mit dem Algorithmus FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS.



SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (W)

```

1   $n \leftarrow \text{rows}[W]$ 
2   $L^{(1)} \leftarrow W$ 
3  for  $m \leftarrow 2$  to  $n-1$ 
4    do  $L^{(m)} \leftarrow \text{EXTEND-SHORTEST-PATHS}(L^{(m-1)}, W)$ 
5  return  $L^{(n-1)}$ 
  
```

FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (W)

```

1   $n \leftarrow \text{rows}[W]$ 
2   $L^{(1)} \leftarrow W$ 
3   $m \leftarrow 1$ 
4  while  $m < n-1$ 
5    do  $L^{(2m)} \leftarrow \text{EXTEND-SHORTEST-PATHS}(L^{(m)}, L^{(m)})$ 
6     $m \leftarrow 2m$ 
7  return  $L^{(m)}$ 
  
```

EXTEND-SHORTEST-PATHS (L, W)

```

1   $n \leftarrow \text{rows}[L]$ 
2  sei  $L' = (l'_{ij})$  eine  $n \times n$  – Matrix.
3  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
4    do for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
5      do  $l'_{ij} \leftarrow \infty$ 
6      for  $k \leftarrow 1$  to  $n$ 
7        do  $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$ 
8  return  $L'$ 
  
```

Aufgabe 2

Berechnen Sie zu folgendem Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(4,1), (4,3), (3,2), (2,3), (2,4)\}$ die transitive Hülle. Notieren Sie alle Matrizen $T^{(k)}$, $k = 1, \dots, 4$, die nach jeder äußeren for-Schleife (Zeilen 7-10) entstehen.

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{if } i = j \text{ oder } (i,j) \in E \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}$$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

TRANSITIVE-CLOSURE(**G**)

```

1  n ← |V[G]|
2  for i ← 1 to n
3    do for j ← 1 to n
4      do if i = j or (i, j) ∈ E[G]
5          then tij(0) ← 1
6          else tij(0) ← 0
7  for k ← 1 to n
8    do for i ← 1 to n
9      do for j ← 1 to n
10         do tij(k) ← tij(k-1) ∨ (tik(k-1) ∧ tkj(k-1))
11  return T(n)
```

Schablonen zu Aufgabe 1:

W	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

L⁽²⁾	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0



L⁽⁴⁾	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0



L⁽³⁾	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0



L⁽⁴⁾	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Schablonen zu Aufgabe 2: $G^{(0)}$ ist der vollständige Graph

$G^{(0)}$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	0
4	1	0	1	1

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{if } i = j \text{ oder } (i,j) \in E \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}$$

$G^{(1)}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$G^{(2)}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$G^{(3)}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$G^{(4)}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$G^{(4)}$ ist die transitive Hülle.