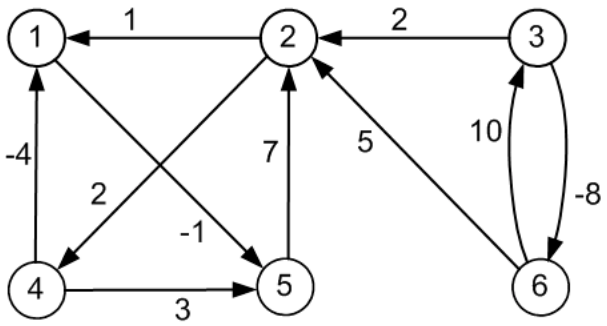
Prof. Dr. Heiner Klocke
Fachhochschule Köln – Informatik
http://www.gm.fh-koeln.de/~hk/

All Pairs Shortest Paths

Aufgabe 1

Wenden Sie den Algorithmus SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS auf den folgenden gerichteten Graphen an. Geben Sie die Matrizen an, die nach jeder Iteration des for-Loops in den Zeilen 3-4 entstehen. Machen Sie dasselbe mit dem Algorithmus FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS.



SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (W)
1 n ← rows[W]
2 $L^{(1)} \leftarrow W$
3 **for** m ← 2 to n-1
4 **do** $L^{(m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS($L^{(m-1)}$, W)
5 **return** $L^{(n-1)}$

FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS (W)
1 n ← rows[W]
2 $L^{(1)} \leftarrow W$
3 m ← 1
4 **while** m < n-1
5 **do** $L^{(2m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS($L^{(m)}$, $L^{(m)}$)
6 m ← 2m
7 **return** $L^{(m)}$

EXTEND-SHORTEST-PATHS (L, W)
1 n ← rows[L]
2 sei $L' = (l'_{ij})$ eine n × n – Matrix.
3 **for** i ← 1 **to** n
4 **do for** j ← 1 **to** n
5 **do** $l'_{ij} \leftarrow \infty$
6 **for** k ← 1 **to** n
7 **do** $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
8 **return** L'

Aufgabe 2

Berechnen Sie zu folgendem Graphen G = (V, E) mit G = {1, 2, 3, 4}, E = {(4,1), (4,3), (3,2), (2,3), (2,4)} die transitive Hülle. Notieren Sie alle Matrizen $T^{(k)}$, k = 1, ..., 4, die nach jeder äußeren for-Schleife (Zeilen 7-10) entstehen.

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{if } i = j \text{ oder } (i,j) \in E \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}$$

A	B	A ∧ B	A ∨ B
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

```
TRANSITIVE-CLOSURE(G)
1   n ← |V[G]|
2   for i ← 1 to n
3     do for j ← 1 to n
4        do if i = j or (i, j) ∈ E[G]
5                then  t_ij(0) ← 1
6                else  t_ij(0) ← 0
7   for k ← 1 to n
8     do for i ← 1 to n
9        do for j ← 1 to n
10               do t_ij^(k) ← t_ij^(k-1) ∨ (t_ik^(k-1) ∧ t_kj^(k-1))
11  return T^(n)
```

Schablonen zu Aufgabe 1:

W	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$\mathbf{L^{(2)}}$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$\mathbf{L^{(4)}}$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$\mathbf{L^{(3)}}$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$\mathbf{L^{(4)}}$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

Schablonen zu Aufgabe 2: $G^{(0)}$ ist der vollständige Graph

$\mathbf{G^{(0)}}$	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	0
4	1	0	1	1

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ und } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{if } i = j \text{ oder } (i,j) \in E \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}$$

$\mathbf{G^{(1)}}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$\mathbf{G^{(2)}}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$\mathbf{G^{(3)}}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$\mathbf{G^{(4)}}$	1	2	3	4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1

$G^{(4)}$ ist die transitive Hülle.