Kap 13 - Unsicherheit

Von: Michael Stefani – Matr.Nr.: 11045621

Einleitung

- Für Logische Agenten gilt:
  - Aussagen sind wahr, falsch oder unbekannt
  - Pläne können mit genügend Fakten abgeleitet werden
- Meistens kein Zugriff auf die gesamte Wahrheit

→ Agenten müssen unter Unsicherheit agieren!

Einleitung (2)

Beispiel: Fahrt zum Flughafen

- Verwendung des Plans A90 (90 Minuten vor Abflug losfahren)
- Auch bei geringer Entfernung zum Flughafen nicht mit Sicherheit erfüllbar
- Stattdessen kann der Agent nur folgern, dass A90 ihn rechtzeitig zum Flughafen bringt, wenn etliche Bedingungen erfüllt sind

Umgang mit unsicherem Wissen

Worum handelt es sich bei unsicherem Wissen?

Erläuterung am Beispiel einer zahnmedizinischen Diagnose.

Betrachtung einer Diagnose unter Verwendung von FOL:

Was sagt folgende Regel aus, bzw. was soll sie aussagen?

$$\forall\, p\, Symptom(p, Zahnschmerzen) \Rightarrow Krankheit(p, Loch)$$

Umgang mit unsicherem Wissen (2)

Der Ansatz mit FOL schlägt aus drei Gründen fehl:

- Faulheit
- Theoretisches Unwissen
- Praktisches Unwissen

Typisch für alle Domänen in denen Beurteilungen nötig sind.

Wissen des Agenten kann nur einen Glaubensgrad in Bezug auf Sätze bereitstellen.

→ Wahrscheinlichkeitstheorie

Umgang mit unsicherem Wissen (3)

Die Wahrscheinlichkeit bietet eine Möglichkeit Unsicherheit zusammenzufassen, die aus Faulheit und Unwissenheit entsteht.

Wir glauben zu 80%, dass ein Patient ein Loch hat, wenn er Zahnschmerzen hat (Wir sind uns also unsicher!).

Dies bedeutet:
Wir erwarten von allen Situationen, die aufgrund des Wissens des Agenten nicht von der aktuellen Situation unterschieden werden können, die Patienten in 80% der Fälle ein Loch haben.

Glaubensgrad ↔ Wahrheitsgrad

Umgang mit unsicherem Wissen (4)

Aussagen über Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf den Glauben des Agenten, nicht auf die Welt!

Dies bedeutet:
- Glaube ist von Wahrnehmungen abhängig
- Wahrnemungen bilden Evidenz
- Aufgrund der Evidenz werden Wahrscheinlichkeitszusicherungen gemacht

Wahrscheinlichkeiten stehen immer im Bezug zu den jeweiligen Evidenzen

- Unbedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Unsicherheit und rationale Entscheidungen

Agent kann nicht mehr auf der Grundlage, ob eine Aktion zu einem Ziel führt eine Aktion auswählen.

Er muss Prioritäten zwischen den verschiedenen möglichen Ergebnissen der verschiedenen Pläne vergeben.

Hierzu wird die Nutzentheorie verwendet (Vergabe eines Nutzengrades für die Zustände)

Diese werden mit Wahrscheinlichkeiten kombiniert:
Entscheidungstheorie = Wahrscheinlichkeitstheorie + Nutzentheorie

Der Agent handelt genau dann rational, wenn er die Aktion auswählt, die den höchsten erwarteten Nutzen bringt, gemittelt über alle möglichen Ergebnisse der Aktion.

Entscheidungstheoretischer Agent

```
function DT-AGENT(percept) returns an action
    static: a set probabilistic beliefs about the state of the world

    calculate updated probabilities for current state based on
        available evidence including current percept and previous action
    calculate outcome probabilities for actions,
        given action descriptions and probabilities of current states
    select action with highest expected utility
        given probabilities of outcomes and utility information
    return action
```

Grundlegende Notation der Wahrscheinlichkeit

Formale Sprache für die Repräsentation und das Schliessen mit unsicherem Wissen

Zwei Aspekte sind zu berücksichtigen:
1. Natur der Sätze, denen Glaubensgrade zugeordnet werden sollen
2. Abhängigkeit des Glaubensgrades von der Erfahrung des Agenten

Inhalt des Abschnitts

- Aussagen
- Atomare Ereignisse
- Unbedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aussagen

Glaubensgrade werden immer auf Aussagen angewendet

Die hier angewandte Sprache ist etwas ausdrucksstärker als die reine Aussagenlogik

Grundlegendes Element ist die Zufallsvariable (verweist auf einen Teil der Welt, dessen Zustand anfänglich unbekannt ist). Namen von Zufallsvariablen werden groß geschrieben.

Jede Zufallsvariable besitzt eine Domäne:
- Boolesche Zufallsvariablen (true, false)
- Diskrete Zufallsvariablen (sonnig, regnerisch, wolkig, schnee)
- Stetige Zufallsvariablen (reelle Zahlen)

Atomare Ereignisse

Vollständige Spezifikation des Zustands der Welt, über die der Agent unsicher ist (Zuweisung von Werten für alle Variablen, aus denen sich die Welt zusammensetzt)

Wichtige Eigenschaften von atomaren Ereignissen:

- Schliessen sich wechselseitig aus
- Die Menge aller möglichen AE ist erschöpfend
- Aus jedem bestimmten AE folgt logisch die Wahrheit oder Falschheit jeder Aussage
- Jede Aussage ist logisch äquivalent mit der Disjunktion aller AE, aus denen die Wahrheit der Aussage logisch folgt.

Unbedingte Wahrscheinlichkeit

Wird einer Aussage a beim Fehlen einer anderen Information zugeordnet und als P(a) geschrieben

Bsp.: P(Loch = true) = 0.1 oder P(loch) = 0.1

Um die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Werte einer Zufallsvariablen darzustellen, verwenden wir einen Vektor. So wird aus den vier Gleichungen

P(Wetter = sonnig) = 0.7
P(Wetter = regnerisch) = 0.2
P(Wetter = wolkig) = 0.08
P(Wetter = schnee) = 0.02

folgender Vektor

P(Wetter) = <0.7; 0.2; 0.08; 0.02> (unbedingte Wahscheinlichkeitsverteilung von Wetter)

gemeinsame und vollständige gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sobald der Agent eine Evidenz erhält, die sich auf die Zufallsvariablen der Domäne bezieht, gelten die vorher bestimmten unbedingten Wahrscheinlichkeiten nicht mehr.

Es kommen bedingte Wahrscheinlichkeiten mit folgender Notation ins Spiel:

$P(a \mid b)$

a und b sind beliebige Aussagen und die obige Schreibweise bedeutet:

„Die Wahrscheinlichkeit von a, wenn wir nur b wissen“

Bedingte Wahrscheinlichkeit (2)

Im Hinblick auf unbedingte Wahrscheinlichkeiten können bedingte Wahrscheinlichkeiten wie folgt definiert werden:

$$P(a|b)=\frac{(P(a \wedge b))}{(P(b))}$$

Diese Gleichung gilt für P(b) > 0 immer. Sie könnte auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$P(a \wedge b)=P(a|b)P(b)$$

Diese Gleichung wird als Produktregel bezeichnet

Folgende Darstellung fasst alle Gleichungen zusammen, die sich auf die verschiedenen Werte von X und Y beziehen:

P(X,Y) = **P**(X|Y)**P**(Y)

Die Axiome der Wahrscheinlichkeit

Diese Axiome dienen dazu, die Wahrscheinlichkeitsskala und ihre Endpunkte zu definieren.

1. Alle Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1. Für jede Aussage gilt:

$$0 \leqslant P(a) \leqslant 1$$

2. Notwendigerweise wahre Aussagen haben die Wahrscheinlichkeit 1, notwendigerweise falsche Aussagen haben die Wahrscheinlichkeit 0

$$P(true)=1 \quad P(false)=0$$

3. Die Wahrscheinlichkeit einer Disjunktion ist gegeben durch:

$$P(a \vee b)=P(a)+P(b)-P(a \wedge b)$$

Verwendung der Axiome

Zahlreiche Fakten können aus den grundlegenden Axiomen abgeleitet werden

$$P(\neg a) = 1 - P(a)$$

Für diskrete Variablen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} P(D = d_i) = 1$$

Jede (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung über eine einzige Variable muss als Summe 1 ergeben

Die Wahrscheinlichkeit einer Aussage ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der atomaren Ereignisse, in denen sie gilt:

$$P(a) = \sum_{e_i \in \boldsymbol{e}(a)} P(e_i)$$

Wozu Wahrscheinlichkeitsaxiome?

Beschränken die Menge der probabilistischen Glauben

Logischer Fall:

Agent kann nicht gleichzeitig A, B und $\neg(a \wedge b)$ glauben.
Mindestens einer dieser Glauben muss in der Welt falsch sein!

Bei Wahrscheinlichkeiten bezieht sich die Aussage nicht auf die Welt, sondern auf den Wissenszustand des Agenten.

Wieso könnte ein Agent nicht folgende Glaubensmenge besitzen? (Verletzt Axiom 3!)

$$P(a)=0{,}4 \quad P(a \wedge b)=0{,}0$$

$$P(b)=0{,}3 \quad P(a \vee b)=0{,}8$$

Wozu Wahrscheinlichkeitsaxiome? (2)

Verknüpfung zwischen Glaubensgrad und Aktion

Idee:
- Agent besitzt Glaubensgrad in Bezug auf Aussage a
- Er sollte in der Lage sein, die Chance anzugeben, für die es keinen Unterschied macht, für oder gegen a zu sein

Beispiel:
Wette

*Wenn Agent 1 eine Menge von Glaubensgraden ausdrückt, die die Axiome der Wahrscheinlichkeit verletzen, gibt es eine Wettkombination für Agent 2, die **garantiert**, dass Agent 1 **immer** Geld verliert,*

→ Es ist irrational einen Glauben zu haben, der die Wahrscheinlichkeitsaxiome verletzt.

Inferenz unter Verwendung vollständig gemeinsamer Verteilungen

Einfache Methode der probabilistischen Inferenz – Berechnung aus beobachteten Evidenzen bedingter Wahrscheinlichkeiten für Abfrageaussagen.

Vollständig gemeinsame Verteilung für die Domäne mit den 3 Booleschen Variablen *Zahnschmerzen, Loch* und *Verfangen*:

	Zahnschmerzen		!Zahnschmerzen	
	Verfangen	!Verfangen	Verfangen	!Verfangen
Loch	0,108	0,012	0,072	0,008
!Loch	0,016	0,064	0,144	0,576

Marginalisierung oder Aussummierung:

$$P(Y)=\sum_z P(Y,Z)$$ - Verteilung über Y

Konditionierung:

$$P(Y)=\sum_z P(Y|Z)P(Z)$$

Inferenz unter Verwendung vollständig gemeinsamer Verteilungen

Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

	Zahnschmerzen		!Zahnschmerzen	
	Verfangen	!Verfangen	Verfangen	!Verfangen
Loch	0,108	0,012	0,072	0,008
!Loch	0,016	0,064	0,144	0,576

Beispiel:
Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Lochs, wenn wir die Evidenz für Zahnschmerzen haben.

$$P(loch|zahnschmerzen)=\frac{(P(loch \wedge zahnschmerzen))}{(P(zahnschmerzen))}$$

$$P(loch|zahnschmerzen)=\frac{(0{,}108+0{,}012)}{(0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064)}=0{,}6$$

Gegenprobe:

$$P(\neg loch|zahnschmerzen)=\frac{(P(\neg loch \wedge zahnschmerzen))}{(P(zahnschmerzen))}$$

$$P(\neg loch|zahnschmerzen)=\frac{(0{,}016+0{,}064)}{(0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064)}=0{,}4$$

1 / P(zahnschmerzen) wird als Normalisierungskonstante für die Verteilung **P**(Loch | zahnschmerzen) bezeichnet und mit α abgekürzt

Inferenz unter Verwendung vollständig gemeinsamer Verteilungen

Anhand der Notation für die Normalisierungskonstante können die beiden vorherigen Gleichungen zu einer zusammengefasst werden:

$$\mathbf{P}(Loch|zahnschmerzen)=\alpha\,\mathbf{P}(Loch, zahnschmerzen)$$

$$\mathbf{P}(Loch|zahnschmerzen)=\alpha[\mathbf{P}(Loch, zahnschmerzen, verfangen)+\mathbf{P}(Loch, zahnschmerzen, \neg verfangen)]$$

$$\mathbf{P}(Loch|zahnschmerzen)=\alpha[\langle 0{,}108; 0{,}016\rangle+\langle 0{,}012; 0{,}064\rangle]=\alpha\langle 0{,}12; 0{,}08\rangle=\langle 0{,}6; 0{,}4\rangle$$

Die allgemeine Form der Abfrage:

$$\mathbf{P}(X|\mathbf{e})=\alpha\,\mathbf{P}(X,\mathbf{e})=\alpha\sum_{y}\mathbf{P}(X,\mathbf{e},\mathbf{y})$$

Ein Abfragealgorithmus führt eine Schleife über die Werte von X und Y aus, um alle möglichen atomaren Ereignisse mit festem e aufzulisten, summiert ihre Wahrscheinlichkeiten und normalisiert die Ergebnisse

Unabhängigkeit

Hinzufügen der vierten Variable Wetter zum Beispiel

Produktregel:

$$P(zahnschmerzen, verfangen, loch, Wetter=wolkig)=P(Wetter=wolkig \mid zahnschmerzen, verfangen, loch)\,P(zahnschmerzen, verfangen, loch)$$

Hier würde das Wetter von den Zahnproblemen abhängen!

Daher scheint folgende Formulierung vernüftiger zu sein:

$$P(Wetter=wolkig \mid zahnschmerzen, verfangen, loch)=P(Wetter=wolkig)$$

Diese Eigenschaft wird als Unabhängigkeit bezeichnet.

Die Unabhängigkeit für Aussagen a und b wird wie folgt geschrieben:

$$P(a|b)=P(a) \qquad P(a\wedge b)=P(a)\,P(b)$$

Gleiches gilt für Variablen.

Bayessche Regel

Durch Gleichsetzung der rechten Seiten der Produktregel – Gleichungen (kommutativ)

$$P(a \wedge b) = P(a|b) \ \ P(b)$$

$$P(a \wedge b) = P(b|a) \ \ P(a)$$

und anschliessendes dividieren durch P(a) erhalten wir die Bayessche Regel:

$$P(b|a) = \frac{(P(a|b) \ \ P(b))}{(P(a))}$$

Allgemeiner Fall:

$$\boldsymbol{P}(Y|X) = \frac{(\boldsymbol{P}(X|Y) \ \ \boldsymbol{P}(Y))}{(\boldsymbol{P}(X))}$$

$$\boldsymbol{P}(Y|X, e) = \frac{(\boldsymbol{P}(X|Y, e) \ \ \boldsymbol{P}(Y|\boldsymbol{e}))}{(\boldsymbol{P}(X|\boldsymbol{e}))}$$

e: Hintergrundevidenz

Bayessche Regel (2)

Anwendungsbeispiel Medizin:

- Meningitis bewirkt in 50% der Fälle einen steifen Nacken
- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient Meningitis hat ist 1 / 50.000 (P(m))
- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient einen steifen Nacken hat ist 1/20 (P(s))

$$P(s|m)=0{,}5 \qquad P(m)=1/50000 \qquad P(s)=1/20$$

$$P(m|s)=\frac{(P(s|m)\ \ P(m))}{(P(s))}=\frac{(0{,}5\times 1/50000)}{(1/20)}=0{,}0002$$

Um nicht die Wahrscheinlichkeit der Evidenz (hier P(s)) abschätzen zu müssen, werden bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Abfragevariablen berechnet und anschliessend normalisiert:

$$\boldsymbol{P}(M|s)=\alpha\langle P(s|m)\ \ P(m), P(s|\neg m)\ \ P(\neg m)\rangle$$

Allgemein:

$$\boldsymbol{P}(Y|X)=\alpha\,\boldsymbol{P}(X|Y)\ \ P(Y)$$

Bayessche Regel: Evidenzen kombinieren

Was ist zu tun, wenn zwei oder mehr Evidenzen berücksichtigt werden müssen?

Zum Beispiel:
Ablesen aus der vollständigen gemeinsamen Verteilung

$$\mathbf{P}(Loch \mid zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha \langle 0{,}108\,;\, 0{,}016 \rangle \approx \langle 0{,}871\,;\, 0{,}129 \rangle$$

Nicht praktikabel für grosse Anzahl von Variablen!

Anwendung der Bayesschen Regel zur Umformulierung des Problems:

$$\mathbf{P}(Loch \mid zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha\, \mathbf{P}(zahnschmerzen \wedge verfangen \mid Loch)\, \mathbf{P}(Loch)$$

Damit dies funktioniert, müssen die bedingten Wahrscheinlichkeiten für zahnschmerzen und verfangen für jeden Wert von Loch bekannt sein.

Die Ausdrücke müssen vereinfacht werden, um praktikabel zu sein.

→ Verfeinerung der Unabhängigkeit

Bayessche Regel: Evidenzen kombinieren

Zahnschmerzen und Verfangen sollten voneinander unabhängig sein.
Dies sind sie, wenn man weiss, ob ein Loch vorhanden ist oder nicht!

Bedingte Unabhängigkeit von zahnschmerzen und verfangen bei gegebenem Loch:

$$\mathbf{P}(zahnschmerzen \wedge verfangen | Loch) = \mathbf{P}(zahnschmerzen | Loch) \ \mathbf{P}(verfangen | Loch)$$

Durch Einsetzen in die vorherige Gleichung erhalten wir die Wahrscheinlichkeit eines Lochs:

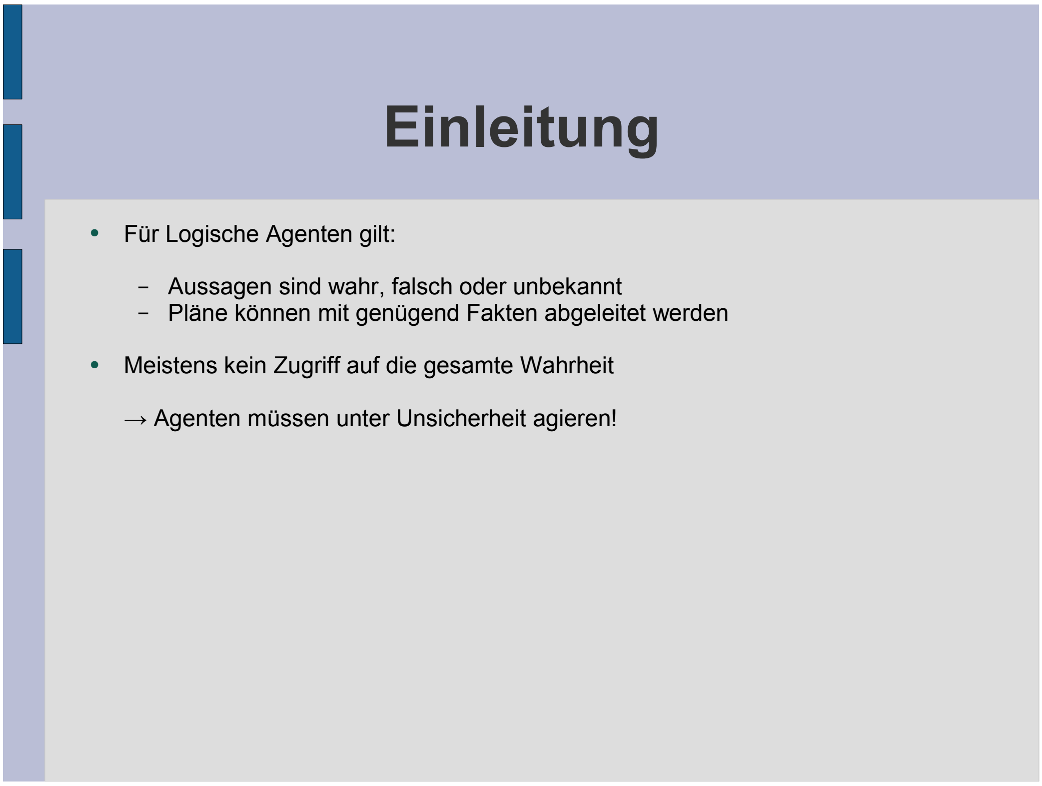
$$\mathbf{P}(Loch | zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha \, \mathbf{P}(zahnschmerzen | Loch) \\ \mathbf{P}(verfangen | Loch) \, \mathbf{P}(Loch)$$

Allgemeine Form:

$$\mathbf{P}(X, Y | Z) = \mathbf{P}(X | Z) \, \mathbf{P}(Y | Z)$$

Kap 13 - Unsicherheit

Von: Michael Stefani – Matr.Nr.: 11045621



- Wumpuswelt: Nur unmittelbar benachbarte Felder sind beobachtbar.

Einleitung (2)

Beispiel: Fahrt zum Flughafen

- Verwendung des Plans A90 (90 Minuten vor Abflug losfahren)
- Auch bei geringer Entfernung zum Flughafen nicht mit Sicherheit erfüllbar
- Stattdessen kann der Agent nur folgern, dass A90 ihn rechtzeitig zum Flughafen bringt, wenn etliche Bedingungen erfüllt sind

- Realwelt ist wesentlich komplexer
- Für logische Agenten ist es unmöglich, korrekte und vollständige Beschreibung für Aktionen zu formulieren
- Was tun? -> Leistungsmaß maximieren!

Umgang mit unsicherem Wissen

Worum handelt es sich bei unsicherem Wissen?

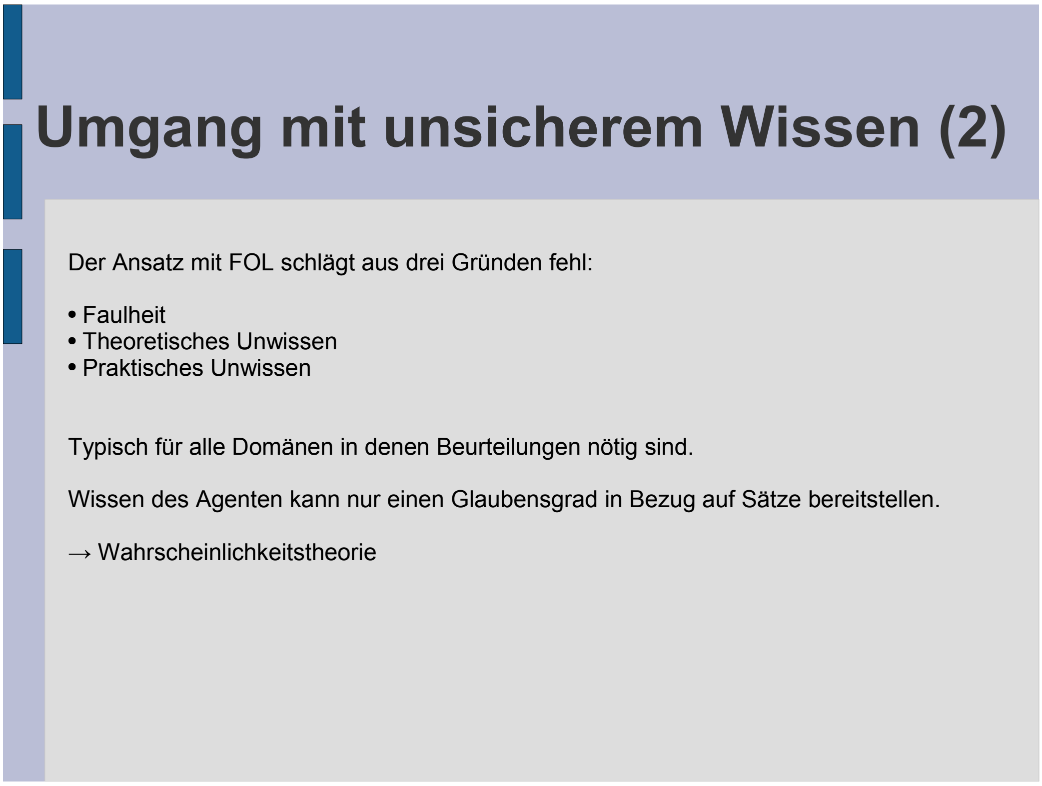
Erläuterung am Beispiel einer zahnmedizinischen Diagnose.

Betrachtung einer Diagnose unter Verwendung von FOL:

Was sagt folgende Regel aus, bzw. was soll sie aussagen?

$$\forall\, p\, Symptom(p, Zahnschmerzen) \Rightarrow Krankheit(p, Loch)$$

- Diagnose ist falsch: Nicht alle Patienten mit Zahnschmerzen haben Löcher.
- Grosse Anzahl von möglichen Ursachen
- Auch kausale Regel bringt keine Verbesserung: Nicht alle Löcher verursachen Zahnschmerzen!



- Faulheit: Es können nicht alle Möglichkeiten aufgezählt werden
- Theoretisches Unwissen: Evtl kennt man gar nicht alle Möglichkeiten
- Praktisches Unwissen: Überprüfung aller Möglichkeiten ist zu aufwendig.

Umgang mit unsicherem Wissen (3)

Die Wahrscheinlichkeit bietet eine Möglichkeit Unsicherheit zusammenzufassen, die aus Faulheit und Unwissenheit entsteht.

Wir glauben zu 80%, dass ein Patient ein Loch hat, wenn er Zahnschmerzen hat (Wir sind uns also unsicher!).

Dies bedeutet:
Wir erwarten von allen Situationen, die aufgrund des Wissens des Agenten nicht von der aktuellen Situation unterschieden werden können, die Patienten in 80% der Fälle ein Loch haben.

Glaubensgrad ↔ Wahrheitsgrad

- Glaubensgrad <-> Wahrheitsgrad

Glaubensgrad: hohe Erwartung, dass der Satz wahr ist (Epistemologische Bindung)
Wahrheitsgrad: Aussage über Fakten (Ontologische Bindung)

Umgang mit unsicherem Wissen (4)

Aussagen über Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf den Glauben des Agenten, nicht auf die Welt!

Dies bedeutet:
- Glaube ist von Wahrnehmungen abhängig
- Wahrnemungen bilden Evidenz
- Aufgrund der Evidenz werden Wahrscheinlichkeitszusicherungen gemacht

Wahrscheinlichkeiten stehen immer im Bezug zu den jeweiligen Evidenzen

- Unbedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- Beispiel: Ziehen einer Karte aus einem Kartenspiel. Glaube vor, bzw. nach Einsicht in die gezogene Karte

Unsicherheit und rationale Entscheidungen

Agent kann nicht mehr auf der Grundlage, ob eine Aktion zu einem Ziel führt eine Aktion auswählen.

Er muss Prioritäten zwischen den verschiedenen möglichen Ergebnissen der verschiedenen Pläne vergeben.

Hierzu wird die Nutzentheorie verwendet (Vergabe eines Nutzengrades für die Zustände)

Diese werden mit Wahrscheinlichkeiten kombiniert:
Entscheidungstheorie = Wahrscheinlichkeitstheorie + Nutzentheorie

Der Agent handelt genau dann rational, wenn er die Aktion auswählt, die den höchsten erwarteten Nutzen bringt, gemittelt über alle möglichen Ergebnisse der Aktion.

- Agent könnte früher zum Flughafen fahren. Ist dies rational? Nicht unbedingt, es kommt auf den maximalen erwarteten Nutzen an!

Entscheidungstheoretischer Agent

```
function DT-AGENT(percept) returns an action
    static: a set probabilistic beliefs about the state of the world

    calculate updated probabilities for current state based on
          available evidence including current percept and previous action
    calculate outcome probabilities for actions,
          given action descriptions and probabilities of current states
    select action with highest expected utility
          given probabilities of outcomes and utility information
    return action
```

- Konzeptioneller Aufbau eines entscheidungstheoretischen Agenten

Grundlegende Notation der Wahrscheinlichkeit

Formale Sprache für die Repräsentation und das Schliessen mit unsicherem Wissen

Zwei Aspekte sind zu berücksichtigen:
1. Natur der Sätze, denen Glaubensgrade zugeordnet werden sollen
2. Abhängigkeit des Glaubensgrades von der Erfahrung des Agenten

Inhalt des Abschnitts

- Aussagen
- Atomare Ereignisse
- Unbedingte Wahrscheinlichkeiten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aussagen

Glaubensgrade werden immer auf Aussagen angewendet

Die hier angewandte Sprache ist etwas ausdrucksstärker als die reine Aussagenlogik

Grundlegendes Element ist die Zufallsvariable (verweist auf einen Teil der Welt, dessen Zustand anfänglich unbekannt ist). Namen von Zufallsvariablen werden groß geschrieben.

Jede Zufallsvariable besitzt eine Domäne:
- Boolesche Zufallsvariablen (true, false)
- Diskrete Zufallsvariablen (sonnig, regnerisch, wolkig, schnee)
- Stetige Zufallsvariablen (reelle Zahlen)

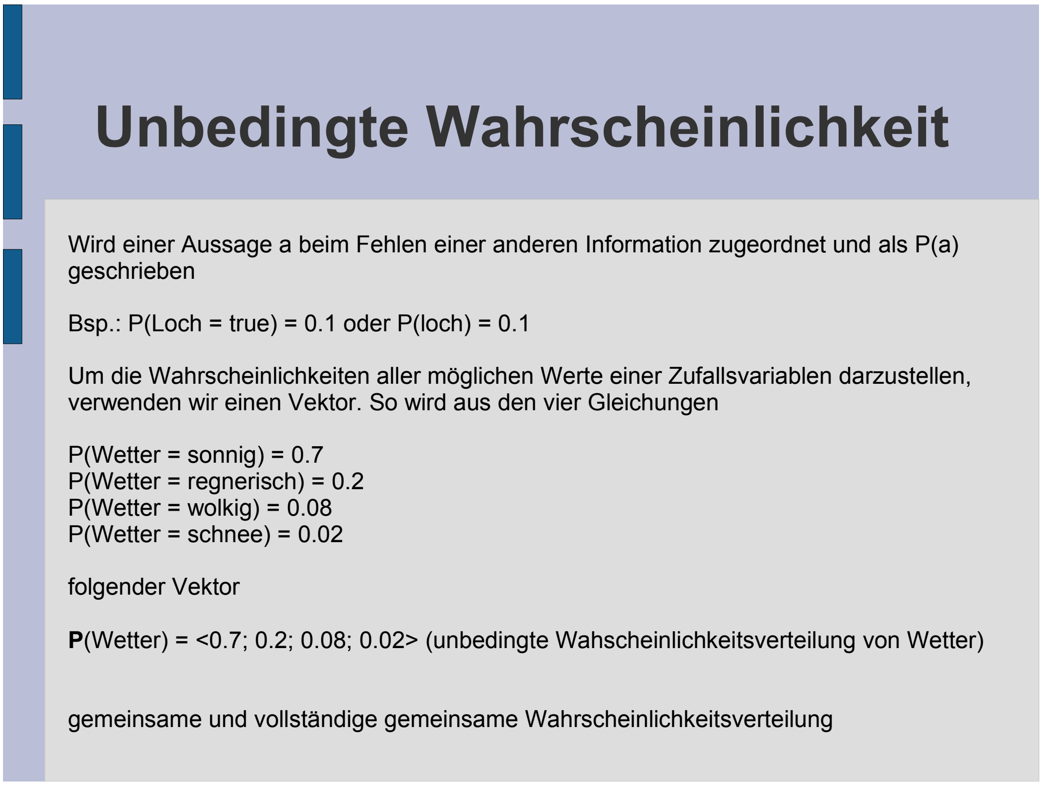
Atomare Ereignisse

Vollständige Spezifikation des Zustands der Welt, über die der Agent unsicher ist
(Zuweisung von Werten für alle Variablen, aus denen sich die Welt zusammensetzt)

Wichtige Eigenschaften von atomaren Ereignissen:

- Schliessen sich wechselseitig aus
- Die Menge aller möglichen AE ist erschöpfend
- Aus jedem bestimmten AE folgt logisch die Wahrheit oder Falschheit jeder Aussage
- Jede Aussage ist logisch äquivalent mit der Disjunktion aller AE, aus denen die Wahrheit der Aussage logisch folgt.

- a AND b kann nicht gleichzeitig mit a AND NOT b gelten
- Ein atomares Ereigniss ist in jedem Fall wahr
- Ähnlich wie bei Wahrscheinlichkeitstabellen
- Alle aE disjunkt verknüpfen in denen die Aussage vorkommt (vollständige Verteilung - Tabelle)



- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von z. B. P(Loch, Wetter) = 2 x 4 Tabelle
- Vollständig:

Alle Variablen der betrachteten Welt werden berücksichtigt;
Gibt die Wahrscheinlichkeit für jedes a E an;
Vollständige Spezifikation der eigenen Unsicherheit.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Sobald der Agent eine Evidenz erhält, die sich auf die Zufallsvariablen der Domäne bezieht, gelten die vorher bestimmten unbedingten Wahrscheinlichkeiten nicht mehr.

Es kommen bedingte Wahrscheinlichkeiten mit folgender Notation ins Spiel:

$P(a \mid b)$

a und b sind beliebige Aussagen und die obige Schreibweise bedeutet:

„Die Wahrscheinlichkeit von a, wenn wir nur b wissen“

- Bsp: $P(loch|zahnschmerzen) = 0.8$
=> Die Wahrscheinlichkeit von loch, wenn wir wissen, dass der Patient Zahnschmerzen hat, beträgt 0.8

Bedingte Wahrscheinlichkeit (2)

Im Hinblick auf unbedingte Wahrscheinlichkeiten können bedingte Wahrscheinlichkeiten wie folgt definiert werden:

$$P(a|b)=\frac{(P(a \wedge b))}{(P(b))}$$

Diese Gleichung gilt für P(b) > 0 immer. Sie könnte auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$P(a \wedge b)=P(a|b)P(b)$$

Diese Gleichung wird als Produktregel bezeichnet

Folgende Darstellung fasst alle Gleichungen zusammen, die sich auf die verschiedenen Werte von X und Y beziehen:

P(X,Y) = **P**(X|Y)**P**(Y)

- Produktregel ist kommutativ
- Bed. Wahrsch. werden grösstenteils für probabilistische Inferenz genutzt
- P(a|b) = 0.8 bedeutet NICHT: Wenn b gilt ist P(a) = 0.8!

Die Axiome der Wahrscheinlichkeit

Diese Axiome dienen dazu, die Wahrscheinlichkeitsskala und ihre Endpunkte zu definieren.

1. Alle Wahrscheinlichkeiten liegen zwischen 0 und 1. Für jede Aussage gilt:

$$0 \leq P(a) \leq 1$$

2. Notwendigerweise wahre Aussagen haben die Wahrscheinlichkeit 1, notwendigerweise falsche Aussagen haben die Wahrscheinlichkeit 0

$$P(true)=1 \quad P(false)=0$$

3. Die Wahrscheinlichkeit einer Disjunktion ist gegeben durch:

$$P(a \vee b)=P(a)+P(b)-P(a \wedge b)$$

- Zu 3.: -P(a AND b) := Schnittmengen von a und b subtrahieren

Verwendung der Axiome

Zahlreiche Fakten können aus den grundlegenden Axiomen abgeleitet werden

$$P(\neg a) = 1 - P(a)$$

Für diskrete Variablen gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} P(D = d_i) = 1$$

Jede (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung über eine einzige Variable muss als Summe 1 ergeben

Die Wahrscheinlichkeit einer Aussage ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der atomaren Ereignisse, in denen sie gilt:

$$P(a) = \sum_{e_i \in \boldsymbol{e}(a)} P(e_i)$$

- Letzter Punkt:
  - Disjunktion aller atomaren Ereignisse in denen a gilt <=> Aussage a
  - A E schliessen sich wechselseitig aus
  - Beliebige Konjunktion der a E = false

  => Summenformel auf der Folie!

- Einfache Methode zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten für eine Aussage bei gegebener vollständiger gemeinsamer Verteilung

Wozu Wahrscheinlichkeitsaxiome?

Beschränken die Menge der probabilistischen Glauben

Logischer Fall:

Agent kann nicht gleichzeitig A, B und $\neg(a \wedge b)$ glauben.
Mindestens einer dieser Glauben muss in der Welt falsch sein!

Bei Wahrscheinlichkeiten bezieht sich die Aussage nicht auf die Welt, sondern auf den Wissenszustand des Agenten.

Wieso könnte ein Agent nicht folgende Glaubensmenge besitzen? (Verletzt Axiom 3!)

$$P(a)=0{,}4 \quad P(a \wedge b)=0{,}0$$

$$P(b)=0{,}3 \quad P(a \vee b)=0{,}8$$

- Wieso könnte ein Agent keine Glaubensmenge besitzen, die gegen die Axiome der Wahrscheinlichkeit verstößt?

Wozu Wahrscheinlichkeitsaxiome? (2)

Verknüpfung zwischen Glaubensgrad und Aktion

Idee:
- Agent besitzt Glaubensgrad in Bezug auf Aussage a
- Er sollte in der Lage sein, die Chance anzugeben, für die es keinen Unterschied macht, für oder gegen a zu sein

Beispiel:
Wette

*Wenn Agent 1 eine Menge von Glaubensgraden ausdrückt, die die Axiome der Wahrscheinlichkeit verletzen, gibt es eine Wettkombination für Agent 2, die **garantiert**, dass Agent 1 **immer** Geld verliert,*

→ Es ist irrational einen Glauben zu haben, der die Wahrscheinlichkeitsaxiome verletzt.

- Wette siehe Russel S. 583 - 584

Inferenz unter Verwendung vollständig gemeinsamer Verteilungen

Einfache Methode der probabilistischen Inferenz – Berechnung aus beobachteten Evidenzen bedingter Wahrscheinlichkeiten für Abfrageaussagen.

Vollständig gemeinsame Verteilung für die Domäne mit den 3 Booleschen Variablen *Zahnschmerzen, Loch* und *Verfangen*:

	Zahnschmerzen		!Zahnschmerzen	
	Verfangen	!Verfangen	Verfangen	!Verfangen
Loch	0,108	0,012	0,072	0,008
!Loch	0,016	0,064	0,144	0,576

Marginalisierung oder Aussummierung:

$$P(Y)=\sum_z P(Y,Z)$$ - Verteilung über Y

Konditionierung:

$$P(Y)=\sum_z P(Y|Z)P(Z)$$

- Wahrscheinlichkeiten in der Summe = 1
- Atomare Ereignisse addieren:
  z.B. P(loch OR zahnschmerzen)
  = 0.108 + 0.012 + 0.072 + 0.008 + 0.016 + 0.064 = 0.28
- Marginale Wahrscheinlichkeit von loch: 1.Zeile der Tab. Addieren
- Bedingte Wahrscheinlichkeit: Konditionierung
- Kond. und Marg. Sind praktische Ableitungsregeln

Inferenz unter Verwendung voll-ständig gemeinsamer Verteilungen

Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

	Zahnschmerzen		!Zahnschmerzen	
	Verfangen	!Verfangen	Verfangen	!Verfangen
Loch	0,108	0,012	0,072	0,008
!Loch	0,016	0,064	0,144	0,576

Beispiel:
Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Lochs, wenn wir die Evidenz für Zahnschmerzen haben.

$$P(loch|zahnschmerzen)=\frac{(P(loch \wedge zahnschmerzen))}{(P(zahnschmerzen))}$$

$$P(loch|zahnschmerzen)=\frac{(0{,}108+0{,}012)}{(0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064)}=0{,}6$$

Gegenprobe:

$$P(\neg loch|zahnschmerzen)=\frac{(P(\neg loch \wedge zahnschmerzen))}{(P(zahnschmerzen))}$$

$$P(\neg loch|zahnschmerzen)=\frac{(0{,}016+0{,}064)}{(0{,}108+0{,}012+0{,}016+0{,}064)}=0{,}4$$

1 / P(zahnschmerzen) wird als Normalisierungskonstante für die Verteilung **P**(Loch | zahnschmerzen) bezeichnet und mit α abgekürzt

- Beispiel zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten

Inferenz unter Verwendung vollständig gemeinsamer Verteilungen

Anhand der Notation für die Normalisierungskonstante können die beiden vorherigen Gleichungen zu einer zusammengefasst werden:

$$\boldsymbol{P}(Loch|zahnschmerzen) = \alpha\,\boldsymbol{P}(Loch, zahnschmerzen)$$

$$\boldsymbol{P}(Loch|zahnschmerzen) = \alpha[\boldsymbol{P}(Loch, zahnschmerzen, verfangen) + \boldsymbol{P}(Loch, zahnschmerzen, \neg verfangen)]$$

$$\boldsymbol{P}(Loch|zahnschmerzen) = \alpha[\langle 0{,}108; 0{,}016\rangle + \langle 0{,}012; 0{,}064\rangle] = \alpha\langle 0{,}12; 0{,}08\rangle = \langle 0{,}6; 0{,}4\rangle$$

Die allgemeine Form der Abfrage:

$$\boldsymbol{P}(X|\boldsymbol{e}) = \alpha\,\boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}) = \alpha \sum_{y} \boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$$

Ein Abfragealgorithmus führt eine Schleife über die Werte von X und Y aus, um alle möglichen atomaren Ereignisse mit festem e aufzulisten, summiert ihre Wahrscheinlichkeiten und normalisiert die Ergebnisse

- Allg. Form:
  - X: Abfragevariable
  - E: Evidenzmenge
  - e: beobachtete Werte
  - Y: restliche unbeobachtete Variablen
- Algorithmus ist nicht gut skalierbar
- In der Realität hunderte Variablen, daher vollständige gemeinsame Verteilung eher theoretische Grundlage

Unabhängigkeit

Hinzufügen der vierten Variable Wetter zum Beispiel

Produktregel:

$$P(zahnschmerzen, verfangen, loch, Wetter=wolkig)=P(Wetter=wolkig \mid zahnschmerzen, verfangen, loch)\, P(zahnschmerzen, verfangen, loch)$$

Hier würde das Wetter von den Zahnproblemen abhängen!

Daher scheint folgende Formulierung vernüftiger zu sein:

$$P(Wetter=wolkig \mid zahnschmerzen, verfangen, loch)=P(Wetter=wolkig)$$

Diese Eigenschaft wird als Unabhängigkeit bezeichnet.

Die Unabhängigkeit für Aussagen a und b wird wie folgt geschrieben:

$$P(a|b)=P(a) \qquad P(a \wedge b)=P(a)\,P(b)$$

Gleiches gilt für Variablen.

- Zusicherung von Unabhängigkeit auf Basis von Wissen über die Domäne
- Vollständige Variablenmenge kann in unabhängige Untermengen unterteilt werden
- Grösse der Domänenrepräsentation und die Komplexität des Inferenzproblems werden verringert
- ABER: Auch unabhängige Untermengen können sehr groß werden!

Bayessche Regel

Durch Gleichsetzung der rechten Seiten der Produktregel – Gleichungen (kommutativ)

$$P(a \wedge b) = P(a|b)\ P(b)$$

$$P(a \wedge b) = P(b|a)\ P(a)$$

und anschliessendes dividieren durch P(a) erhalten wir die Bayessche Regel:

$$P(b|a) = \frac{(P(a|b)\ P(b))}{(P(a))}$$

Allgemeiner Fall:

$$\mathbf{P}(Y|X) = \frac{(\mathbf{P}(X|Y)\ \mathbf{P}(Y))}{(\mathbf{P}(X))}$$

$$\mathbf{P}(Y|X, e) = \frac{(\mathbf{P}(X|Y, e)\ \mathbf{P}(Y|\mathbf{e}))}{(\mathbf{P}(X|\mathbf{e}))}$$ e: Hintergrundevidenz

- Liegt allen modernen KI-Systemen als Basis für probabilistische Inferenz zu Grunde
- Allgemeiner Fall entspricht einer Menge von Gleichungen

Bayessche Regel (2)

Anwendungsbeispiel Medizin:

- Meningitis bewirkt in 50% der Fälle einen steifen Nacken
- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient Meningitis hat ist 1 / 50.000 (P(m))
- Die unbedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Patient einen steifen Nacken hat ist 1/20 (P(s))

$$P(s|m)=0{,}5 \qquad P(m)=1/50000 \qquad P(s)=1/20$$

$$P(m|s)=\frac{(P(s|m)\ \ P(m))}{(P(s))}=\frac{(0{,}5\times 1/50000)}{(1/20)}=0{,}0002$$

Um nicht die Wahrscheinlichkeit der Evidenz (hier P(s)) abschätzen zu müssen, werden bedingte Wahrscheinlichkeiten für die Abfragevariablen berechnet und anschliessend normalisiert:

$$\mathbf{P}(M|s)=\alpha\langle P(s|m)\ \ P(m), P(s|\neg m)\ \ P(\neg m)\rangle$$

Allgemein:

$$\mathbf{P}(Y|X)=\alpha\,\mathbf{P}(X|Y)\ \ P(Y)$$

- Aus 1 bedingten und 2 unbedingten Wahrscheinlichkeiten wird 1 bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet. Wozu??
- In der Praxis besitzen wir diese Wahrscheinlichkeiten sehr häufig! (siehe Beispiel)
- Normalisierung: Manchmal einfacher, manchmal nicht.
- Normalisierungskonstante kann berechnet werden (Summe = 1)

Bayessche Regel: Evidenzen kombinieren

Was ist zu tun, wenn zwei oder mehr Evidenzen berücksichtigt werden müssen?

Zum Beispiel:
Ablesen aus der vollständigen gemeinsamen Verteilung

$$\mathbf{P}(Loch \mid zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha \langle 0{,}108 ; 0{,}016 \rangle \approx \langle 0{,}871 ; 0{,}129 \rangle$$

Nicht praktikabel für grosse Anzahl von Variablen!

Anwendung der Bayesschen Regel zur Umformulierung des Problems:

$$\mathbf{P}(Loch \mid zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha\, \mathbf{P}(zahnschmerzen \wedge verfangen \mid Loch)\, \mathbf{P}(Loch)$$

Damit dies funktioniert, müssen die bedingten Wahrscheinlichkeiten für zahnschmerzen und verfangen für jeden Wert von Loch bekannt sein.

Die Ausdrücke müssen vereinfacht werden, um praktikabel zu sein.

→ Verfeinerung der Unabhängigkeit

- P(effekt|ursache): probabilistische Informationen
  - Bsp: Haken verfängt sich im schmerzenden Zahn
- Umformulierung funktioniert evtl. für 2 Variablen...

- Bedingte Unabhängigkeit zerlegt die vollständige gemeinsame Verteilung ebenfalls in sehr viel kleinere Teile

Bsp: Russel S 594

Bayessche Regel: Evidenzen kombinieren

Zahnschmerzen und Verfangen sollten voneinander unabhängig sein.
Dies sind sie, wenn man weiss, ob ein Loch vorhanden ist oder nicht!

Bedingte Unabhängigkeit von zahnschmerzen und verfangen bei gegebenem Loch:

$$\mathbf{P}(zahnschmerzen \wedge verfangen | Loch) = \mathbf{P}(zahnschmerzen | Loch) \;\; \mathbf{P}(verfangen | Loch)$$

Durch Einsetzen in die vorherige Gleichung erhalten wir die Wahrscheinlichkeit eines Lochs:

$$\mathbf{P}(Loch | zahnschmerzen \wedge verfangen) = \alpha \, \mathbf{P}(zahnschmerzen | Loch) \, \mathbf{P}(verfangen | Loch) \, \mathbf{P}(Loch)$$

Allgemeine Form:

$$\mathbf{P}(X, Y | Z) = \mathbf{P}(X | Z) \, \mathbf{P}(Y | Z)$$