

Rezepte Mathematik 1 + 2

Nachfolgend eine Kurzfassung von Rechenrezepten für die Lösung von Standardaufgaben der Mathematik 1 und 2.

Die Rezepte sind kurz und knapp und setzen das Verständnis der jeweiligen Stoffkapitel voraus. Fallweise die angegebenen Querverweise auf Kapitel im Skript nacharbeiten!

Die Rezeptsammlung ist keinesfalls vollständig!! Eine Haftung für die Richtigkeit wird auch nicht übernommen, wenngleich ich mich um richtige Darstellung bestens bemühe!

/WK/ 29.06.2023

Inhalt:

Rezepte Mathematik 1 + 2.....	1
15.1. Aussagenlogik	2
15.2. Lösen von (Un-)Gleichungen	2
15.2.1. Betragsgleichungen	2
15.2.2. Nullstellen finden	2
15.2.3. log- und exp-Gleichungen.....	2
15.2.4. Wurzelgleichungen	2
15.2.5. Ungleichungen.....	3
15.3. Grenzwerte ermitteln	3
15.4. Taylor-Entwicklung	4
15.5. Matrizen multiplizieren	5
15.6. Extremwerte, lokal und global	6
15.6.1. 1 Veränderliche (gehört noch zu Mathe 1)	6
15.6.2. 2 Veränderliche	6
15.7. Lagrange-Methode (Extrema mit Nebenbedingung)	7
15.8. Algorithmus von Dijkstra	7
15.9. Kombinatorik.....	8
15.10. Normalverteilte Zufallsvariable.....	8
15.10.1. Aufgabentyp 1: Wahrscheinlichkeit gefragt	9
15.10.2. Aufgabentyp 2: b (Schwellwert), μ oder σ gefragt	9
15.10.3. Von Binomial zu Normal	9
15.11. Bedingte Wahrscheinlichkeit.....	10
15.12. Rechnen mit komplexen Zahlen.....	10
15.12.1. Umrechnung Polarform \rightarrow kartesische Form	10
15.12.2. Umrechnung kartesische Form \rightarrow Polarform	11
15.12.3. Potenzen komplexer Zahlen	11
15.12.4. Dividieren durch komplexe Zahlen	11
15.13. Differentialgleichungen	12
15.13.1. Trennung der Veränderlichen	12
15.13.2. Linear DGL mit konstanten Koeffizienten.....	12

Rezepte für Mathematik 1 (Wintersemester)

15.1. Aussagenlogik

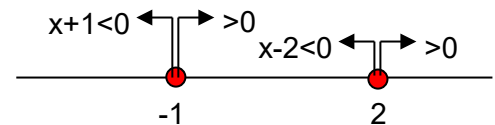
- a) De Morgan'sche Regel 1: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
 b) De Morgan'sche Regel 2: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
 c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$
 d) "Ausmultiplizieren 1": $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
 e) "Ausmultiplizieren 2": $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

15.2. Lösen von (Un-)Gleichungen

15.2.1. Betragsgleichungen

Wie löst man z.B. $|x + 1| = 2|x - 2|$?

1. Umschlagspunkte für alle N Beträge bestimmen
2. Skizze machen
3. N+1 Fallunterscheidungen: jeweils Gleichung lösen
4. Probe: Passt Lösung in Bereich?



15.2.2. Nullstellen finden

Wie löst man $f(x) = 0$?

1. Prüfen, ob sich $f(x)$ als Produkt von (2 oder mehr) Faktoren schreiben lässt.
2. Wenn ja: $f(x)$ ist 0, sobald einer der Faktoren 0 ist. (Die Lösungsmenge ist die Vereinigungsmenge der Nullstellen der Faktoren.)
3. Bei Polynom 2. Grades: Quadratische Ergänzung oder p-q-Formel.

15.2.3. log- und exp-Gleichungen

Wie löst man z.B. $\ln(x) + \ln(x + 2) = 0$?

1. Möglichst alle Terme mit log und Variable x (bzw. exp und Variable x) zusammenfassen oder auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens isolieren.
2. Auf beiden Seiten "e hoch" (bzw. "log") (ist Äquivalenzumformung)
3. Probe, ob Lösung(en) im Definitionsbereich

15.2.4. Wurzelgleichungen

Wie löst man z.B. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{4 - 4x} - 1 = 0$?

1. Mindestens eine Wurzel isolieren: $\sqrt{x + 1} = \sqrt{4 - 4x} + 1$
2. Quadrieren (ACHTUNG: ist " \Rightarrow "-Umformung)
3. Falls noch Wurzel übrig: Weiter bei 1.
4. Probe: Erfüllt jede Lösung die Ausgangsgleichung?

Beim Quadrieren Binomi beachten (!!): $(\sqrt{4 - 4x} + 1)^2 = (4 - 4x) + 2\sqrt{4 - 4x} \cdot 1 + 1^2$

15.2.5. Ungleichungen

Wie löst man z.B. $\frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} \leq 5$?

1. Bei jedem Durchmultiplizieren mit unbestimmtem Term $T(x)$: Fallunterscheidung $T(x) < 0$ und $T(x) > 0$ liefert 2 Einzel-Ungleichungen.
2. Jede Einzel-Ungleichung lösen.
3. Probe, ob Einzel-Lösungsmenge (Bereich) mit dem Bereich der Fallunterscheidung zusammenpasst (d.h. die Schnittmenge beider Bereiche bilden).

Wie löst man eine quadratische Ungleichung, z.B. $x^2 + 2x > 4$?

Wir erzeugen links durch **quadratische Ergänzung** ein vollständiges Quadrat, hier:

$(x+1)^2 > 5$. Es gilt: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|$. [Knorrenschild, S. 97, 115]

Also hier:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 > 5 &\Leftrightarrow |x+1| > \sqrt{5} \\ \Leftrightarrow (x < -1 \wedge -(x+1) > \sqrt{5}) \vee (x > -1 \wedge (x+1) > \sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow (x < -1 \wedge -\sqrt{5} - 1 > x) \vee (x > -1 \wedge x > \sqrt{5} - 1) \\ \Leftrightarrow x < -\sqrt{5} - 1 \vee x > \sqrt{5} - 1 \\ \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{5} - 1[\cup]\sqrt{5} - 1, +\infty[\end{aligned}$$

15.3. Grenzwerte ermitteln

Hier gibt es nicht ein Standardverfahren, sondern verschiedene Ansätze, die man kreativ ausprobieren muss:

- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty}$ und gebrochen rationale Funktion in n : Durch **größte n-Potenz im Nenner (gPiN)** dividieren, dann Limes in jeden einzelnen Term in Zähler und Nenner „hineinziehen“. (Satz S3-4 und S3-5)
- „Hineinziehen“ nur erlaubt, wenn dabei keine unentscheidbare Situation (" ∞ / ∞ ", " $\infty - \infty$ " oder sonstiges nach Satz S3-5) herauskommt
- Bei unentscheidbarer Situation " ∞ / ∞ " schauen, ob man vorher einen gemeinsamen Faktor (z.B. \sqrt{n}) im Zähler und Nenner ausklammern kann.
- Bei unentscheidbarer Situation " $\infty - \infty$ " schauen, ob man vorher durch geeignete Umformungen (Hauptnenner, Binomische Formel, ...) auf entscheidbare Situation kommt.

- Wenn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$: prüfen, ob die Voraussetzungen des Satzes Satz S5-10, Regeln von

L'Hospital ("0/0-Situation" oder " ∞/∞ -Situation") vorliegen. Wenn ja, dann $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

betrachten.

- Evtl. L'Hospital wiederholt anwenden.
- Ergebnis L'Hospital gilt nur, wenn zum Schluss ein endlicher Grenzwert herauskommt.
- Für uneigentliche Grenzwerte: von "links" und von "rechts" betrachten, z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"0+"}} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"0-"}} = -\infty,$$

d.h. wenn der Nenner für jede erlaubte x-Folge eine positive Nullfolge ist, ist der Limes $+\infty$, wenn er eine negative Nullfolge ist, ist der Limes $-\infty$.

15.4. Taylor-Entwicklung

Gegeben: $f(x)$, x_0 . Gesucht: Taylorentwicklung $T(x)$ zu $f(x)$ um x_0 bis zur $n=3$. Ordnung.

1. Man bilde $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2. Tabelle bauen (bis $n+1 = 4$):

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$f(x)$	$f(x_0) = t_0$
...
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) = t_n$
n+1	$f^{(n+1)}(x)$	

(In der letzten Spalte stehen nur Zahlen oder Terme, die wir mit t_n abkürzen)

3. Taylorformel aufschreiben:

$$T(x) = t_0 + t_1 \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \dots + t_n \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Wenn zusätzlich nach einer Fehlerabschätzung (Restglied) gefragt ist, z.B.: "Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für $x=6$ statt $f(x)$ das Taylorpolynom n. Ordnung um $x_0=5$ benutzt?"

4. Eine obere Schranke der Funktion $|f^{(n+1)}(x)|$ für $x \in [5,6]$ bestimmen [entweder das globale Maximum mit Rezept 15.6.1 (Ränder beachten!) oder eine gröbere Abschätzung (obere Schranke) für dieses Maximum] \rightarrow Ergebnis C .

5. Der maximale Fehler ist dann $\frac{C}{(n+1)!} |5-6|^{n+1}$ (Satz S5-9)

15.5. Matrizen multiplizieren

Gesucht: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$.

Geht nur, wenn Spaltenzahl \mathbf{A} = Zeilenzahl \mathbf{B} .

Man schreibt \mathbf{A} links und \mathbf{B} oberhalb der Zielmatrix \mathbf{C} , z.B.:

		b_{11}	b_{12}	b_{13}
		b_{21}	b_{22}	b_{23}
a_{11}	a_{12}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
a_{21}	a_{22}	c_{21}	c_{22}	c_{23}

Es gilt dann für Zielelement c_{ik} = "i-te Zeile von \mathbf{A} " mal "k-te Spalte von \mathbf{B} ", wobei die entsprechenden Einzelemente multipliziert und die Produkte summiert werden, also z.B.

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

Rezepte für Mathematik 2 (Sommersemester)

15.6. Extremwerte, lokal und global

15.6.1. 1 Veränderliche (gehört noch zu Mathe 1)

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion $f(x)$ in $[a,b]$?

0. Wenn f **monoton** ist, dann liegen die Extrema an den Rändern, fertig! – Sonst:
 1. Man bilde $f'(x)$ und $f''(x)$.
 2. Lösungen x_i von $f'(x) = 0$ sind Kandidaten für lokale Extrema.
 3. Tabelle bauen:

x	f(x)	f''(x)	
x_1	$f(x_1)$	$f''(x_1)$	Wenn $f''(x_i) > 0$: lokales Minimum
... < 0 : lokales Maximum
x_n	$f(x_n)$	$f''(x_n)$... $= 0$ <u>und</u> $f'''(x_i) \neq 0$: Sattelpunkt (Wenn $f'''(x_i) = 0$: Sonderfall nach Satz S5-13)

Falls globale Extrema gefragt sind: Wenn die Funktion nur 1 relatives Extremum hat, kann dies an den Rändern nicht übertroffen werden, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

a	f(a)		Ränder nicht vergessen!
b	f(b)		

[Falls $a = -\infty$ oder $b = \infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty}$ benutzen]

5. Das globale Maximum ergibt sich aus dem Maximum von $\{f(a), f(b), f(x_i) \mid x_i \text{ ist lokales Maximum}\}$. Analog für globales Minimum.

15.6.2. 2 Veränderliche

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion $F(x,y)$ in $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$?

1. Man bilde die partiellen Ableitungen $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$.
2. Lösungen (x_i, y_i) von $F_x(x_i, y_i) = 0 \wedge F_y(x_i, y_i) = 0$ sind Kandidaten für lokale Extrema.
3. Tabelle bauen ($\Delta = F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2$):

x	y	F(x,y)	$\Delta(x,y)$	$F_{xx}(x,y)$	
x_1	y_1	$F(x_1, y_1)$	$\Delta(x_1, y_1)$	$F_{xx}(x_1, y_1)$	Wenn $\Delta > 0 \wedge F_{xx} > 0$: lokales Minimum
...	Wenn $\Delta > 0 \wedge F_{xx} < 0$: lokales Maximum
x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	$\Delta(x_n, y_n)$	$F_{xx}(x_n, y_n)$	Wenn $\Delta < 0$: kein Extremum; $= 0$: unentscheidb.

Falls globale Extrema gefragt sind: Gelten die Bedingungen an Δ und F_{xx} **für alle** $(x,y) \in D$ (Satz S 8-5), dann ist's ein globales Extremum, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

x	y	F(x,y)			
a_1	a_2	$F(a_1, a_2)$			Eckpunkte nicht vergessen!
a_1	b_2	$F(a_1, b_2)$			
b_1	a_2	$F(b_1, a_2)$			
b_1	b_2	$F(b_1, b_2)$			

[Falls $a_1, a_2, b_1, b_2 = \pm \infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty}$ benutzen]

- Ränder: Man bestimme alle lokalen Extrema der 4 Funktionen $F(x, a_2)$, $F(x, b_2)$, $F(a_1, y)$, $F(b_1, y)$ (für jede Funktion Rezept 15.6.1, Schritt 1.-3., durchführen).

[Falls z.B. $a_1 = -\infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ benutzen. Ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = -\infty$, braucht man

$F(a_1, y)$ nicht weiter untersuchen (dort kann kein Maximum liegen!). Ebenso nicht die Eckpunkte $F(a_1, a_2)$ u. $F(a_1, b_2)$.]

- Das globale Maximum ergibt sich aus dem Maximum der lokalen Extrema im Innern, der lokalen Extrema an den Rändern und der Eckpunkte. Analog für globales Minimum.

15.7. Lagrange-Methode (Extrema mit Nebenbedingung)

Gegeben sei eine zu maximierende Funktion $g(x, y) = \text{Max}$ und eine Nebenbedingung $r(x, y) = c$.

- Umformen der Nebenbedingung auf $s(x, y) = r(x, y) - c = 0$.
- Hilfsfunktion $F(x, y, \lambda) = g(x, y) + \lambda s(x, y)$.
- Gleichungssystem bilden: $F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad \wedge \quad F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad \wedge \quad s(x, y) = 0$.
- λ eliminieren
- Lösungen für x und y bestimmen.

Bei mehreren Lösungen: Durch Einsetzen in $g(x, y)$ sieht man, welche Lösung Minimum und welche Maximum sein kann. Den Nachweis, dass es Minima / Maxima sind, braucht man in der Regel nicht zu führen.

Bei mehreren Nebenbedingungen $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$, ...: Mehrere Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ einführen \rightarrow mehr Gleichungen im Gleichungssystem.

15.8. Algorithmus von Dijkstra

r = Knoten, $L(r)$ = Länge des Weges zum Knoten r , $P(r)$ = Vorgänger zum Knoten r .

- B = Menge der besuchten Knoten, initial $B = \{\text{Startknoten}\}$.
- R = Rand von B (das ist die Menge der Nachbarn von B).
- Für jede Kante $v = [b_i, r_j]$, die von B nach R führt, bilde $f(v) = L(b_i) + w(v)$.
- Füge das r_j mit minimalen $f(v)$ zu B hinzu. Es ist $L(r_j) = f(v)$ und $P(r_j) = b_i$.
- Weiter bei 2., bis schließlich Endknoten in B .

Fülle dabei alternierend zwei Tabellen:

		iter 1	iter 2
Tab. 1	r		
	L(r)		
	P(r)		

		iter 1	iter 2	...
Tab. 2	R			
	v			
	f(v)			

In Tabelle 2 wird R je Iteration meist mehrere Elemente haben. Ebenso wird es meist mehrere v und $f(v)$ je Iteration geben.

Das minimale $f(v)$ legt mit seinem r_j das nächste r in Tabelle 1 fest.

15.9. Kombinatorik

Systematik

1. Ist Problem in nacheinander ausführbare Teilschritte zerlegbar? – Wenn ja, zerlegen und Produktregel anwenden.
2. Ist die Reihenfolge der ausgewählten Elemente wichtig? – Wenn ja, Variation, sonst: Kombination.
3. Treten Elemente in Auswahl mehrfach auf? – Wenn ja, ZmZ (Ziehen mit Zurücklegen), sonst: ZoZ (Ziehen ohne Zurücklegen).

Auf wie viele Arten kann man k Elemente aus einer n -elementigen Gesamtheit auswählen?

	Reihenfolge wichtig (Variation)	Reihenfolge egal (Kombination)
Ziehen mit Zurücklegen (ZmZ)	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
Ziehen ohne Zurücklegen (ZoZ)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

15.10. Normalverteilte Zufallsvariable

Alle "Regeln Nr." beziehen sich auf Satz S10-12.

Satz S10-12 Regeln für Normalverteilungen

1. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
2. Ist X eine $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, so ist $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} N(0, 1^2)$ -verteilt.
3. Für die Verteilungsfunktion $F(b) = P(X \leq b)$ gilt: $F(b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$
4. $P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$
5. $q = \Phi(z_q) \Leftrightarrow 1 - q = \Phi(-z_q)$
6. Ist Z_q das q -Quantil einer $N(0, 1^2)$ -Verteilung, so ist $X_q = \sigma \cdot Z_q + \mu$ das q -Quantil einer $N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung.

15.10.1. Aufgabentyp 1: Wahrscheinlichkeit gefragt

Sei $X \sim N(\mu, \sigma)$ -verteilt. Bei bekanntem b, μ und σ ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq b)$ gesucht.

1. Nach Regel Nr. 3 gilt $P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$
2. Φ -Wert aus Tabelle ablesen.
3. Falls $z < 0$, dann $\Phi(-z)$ aus Tabelle ablesen und $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ benutzen (Regel Nr. 1).

Varianten:

- Falls nach $P(X > b) = q'$ gefragt ist: Berechne $P(X \leq b) = 1 - q' = q$ und löse nach q' auf.
- Falls nach $P(a < X \leq b)$ gefragt ist, dies auf $P(X \leq b) - P(X \leq a)$ ("obere Grenze – untere Grenze") umformen und Rezept 15.10.1 für diese beiden Wahrscheinlichkeiten verwenden.

15.10.2. Aufgabentyp 2: b (Schwellwert), μ oder σ gefragt

Bei $N(\mu, \sigma)$ -verteilt X sei in $P(X \leq b) = q$ der Wert q bekannt. Gesucht ist eine der Größen b, μ oder σ .

1. q -Quantil z_q der $N(0, 1)$ -Verteilung aus Tabelle bestimmen: a. " nächster Nachbar ": Für welches z_q ist $\Phi(z_q)$ möglichst nahe bei q ? Falls $q < 0.5$: Regel Nr. 5 benutzen: $1 - q = \Phi(-z_q)$. Man liest also einen Wert für $-z_q$ ab, Minuszeichen beachten!
2. $z_q = \frac{b - \mu}{\sigma}$ nach b, μ oder σ auflösen.

Varianten:

- Falls $P(X > b) = q'$ gegeben ist: Umformen auf $P(X \leq b) = 1 - q' = q$.

Verbesserte Version zu "**nächster Nachbar**" in Schritt 1 ist "**lineare Interpolation**"

- aus Tabelle die konsekutiven Werte z_1 und z_2 ablesen mit

$$\Phi(z_1) \leq q \leq \Phi(z_2)$$

- z_q linear interpolieren: aus

$$z_q = z_1 + (z_2 - z_1) \frac{q - \Phi(z_1)}{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}$$

15.10.3. Von Binomial zu Normal

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man Binomialverteilung (\cong Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen, p : Anteil weißer Kugeln in Urne) durch Normalverteilung annähern.

Fragestellung: Wie wahrscheinlich ist $P(X \leq b)$, d.h. unter den n gezogenen Kugeln sind bis zu b weiße?

1. Voraussetzung prüfen: Gilt $np > 5$ und $n(1-p) > 5$? (Satz S10-14, Moivre-Laplace)
2. Wenn ja, dann ist X näherungsweise $N(\mu, \sigma)$ -verteilt: Berechne
 $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ nach Satz S10-10.
3. Es gilt $P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$ und $P(X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu - 0.5}{\sigma}\right)$
4. Weiter mit Rezept 15.10.1 „Aufgabentyp 1“, Schritt 2.

15.11. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Satz S10-16 Bayes-Formel

Seien A und B zwei Ereignisse mit $P(B) \neq 0$. Dann gilt:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Satz S10-17 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Seien A_1, A_2, \dots Ereignisse, die sich paarweise ausschließen und sei $\bigcup_i A_i = \Omega$.
Dann gilt:

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$$

15.12. Rechnen mit komplexen Zahlen

Mit i rechnen wie mit jeder anderen Variablen auch (!)

Einziges Besonderheit: Jedes i^2 durch -1 ersetzen.

15.12.1. Umrechnung Polarform \rightarrow kartesische Form

- Gegeben ist $z = re^{i\phi}$, gesucht ist x und y aus $z = x + iy$

1. Umformen in trigonometrische Form $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$
(Satz von Euler, S11-4)

2. Ausmultiplizieren $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi \Rightarrow z = x + iy$

15.12.2. Umrechnung kartesische Form → Polarform

- Gegeben ist $z = x + iy$, gesucht ist r und ϕ aus $z = re^{i\phi}$

1. Man bestimme $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Falls $x \neq 0$: $\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. a. Falls $x > 0$ (1. oder 4. Quadrant): $\phi = \alpha$. b. Falls $x < 0$ (2. oder 3. Quadrant): $\phi = \alpha + \pi$.
3. Falls $x=0$: $\phi = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{falls } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
4. Mit diesen Werten gilt dann $z = re^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$.

Anm.: All dies wird in vielen Computersprachen (Java, C, Maple, Python) kompakt bestimmt durch $\phi = \text{atan2}(x,y)$.

15.12.3. Potenzen komplexer Zahlen

Wie bestimmt man z.B. $(2 + 3i)^{20}$?

- Zum Berechnen von Potenzen in die Polarform $z = re^{i\phi}$ wechseln (s. Rezept 0). Dort die normalen Potenzgesetze verwenden. Zum Schluss wieder mit Eulerscher Formel, Satz S11-2, in Realteil und Imaginärteil aufspalten (s. Rezept 15.12.1).
- Ist der Exponent $c = p/q$ rational mit teilerfremdem p und q , unbedingt nach dem p -Potenzieren den Term $+2k\pi$ im Exponenten ergänzen:

$$z^c = \left(re^{i(\phi+2k\pi)}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(r^p e^{i(p\phi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{p}{q}} e^{i\left(\frac{p\phi}{q} + \frac{2k\pi}{q}\right)}$$

(s. Kap. 11.3.1), damit man auch alle Lösungen erhält. Es gibt genau q verschiedene Lösungen $k = 0, 1, 2, \dots, q - 1$.

15.12.4. Dividieren durch komplexe Zahlen

Wie bestimmt man z.B. Real- und Imaginärteil von $\frac{2i}{1+5i}$?

- Enthält der Nenner eine komplexe Zahl z : Den Nenner durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl z^* (Satz S11-3) reell machen.

15.13. Differentialgleichungen

15.13.1. Trennung der Veränderlichen

Geht, wenn die rechte Seite ein Produkt $f(x)g(y)$ ist (an allen Stellen mit $g(y) \neq 0$):

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Nun auf beiden Seiten das unbestimmte Integral bilden und nach y auflösen.

15.13.2. Linear DGL mit konstanten Koeffizienten

Für eine solche DGL, z.B.

$$(1) \quad y''(x) + A y'(x) + B y(x) = g(x),$$

geht man schrittweise vor:

1. Zughörige **homogene DGL** $y''(x) + A y'(x) + B y(x) = 0$ mit dem Ansatz

$y(x) = C e^{\lambda x}$ lösen. Setzt man diesen Ansatz in die homogene DGL ein, erhält man ein Polynom für das **komplexe** λ , das n Lösungen hat ($n =$ Ordnung der DGL)

2. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist

$$y_h(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$$

3. **Eine** Lösung der inhomogenen DGL (1) (der mit $g(x)$) finden (raten). Wie? – Geeigneten Ansatz nehmen: (a) wenn $g(x) = \text{const}$, dann $y(x) = D = \text{const}$ probieren; (b) wenn $g(x) = \sin(\omega x)$ (oder $\cos(\omega x)$ oder $e^{i\omega x}$), dann $y(x) = D e^{i(\omega x + \varphi)}$ probieren.

Einsetzen in DGL (1) liefert konkrete Werte für die Parameter D und $\varphi \rightarrow$ **partikuläre Lösung** $y_p(x)$.

4. Die allgemeine Lösung für DGL (1) ist dann $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

--- brauchen wir aktuell (SS2012) nicht mehr in den „Rezepten“ ---

15.11 Fourierreihen

Die komplexe Fourierreihe $F_M(t) = \sum_{n=-M}^M c_n \cdot e^{in\omega t}$ berechnet man, indem man $\forall n$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt, \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

bildet. Evtl. für $n=0$ eine Fallunterscheidung betrachten!

Die Koeffizienten a_n zu $\cos(n\omega t)$ und b_n zu $\sin(n\omega t)$ ergeben sich dann zu

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Nützliche Formeln für die Integralberechnungen falls $m, n \in \mathbf{N}$:

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega x} dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}$$