V 2022-10-18

Mittwoch, 18. Oktober 2023 09:01

meine Sprechstunde heute (18.10.) $\rightarrow$ $14^{00} - 14^{45}$

Einf Prak : heute 15^{00}, 0.401, Elmar Lau

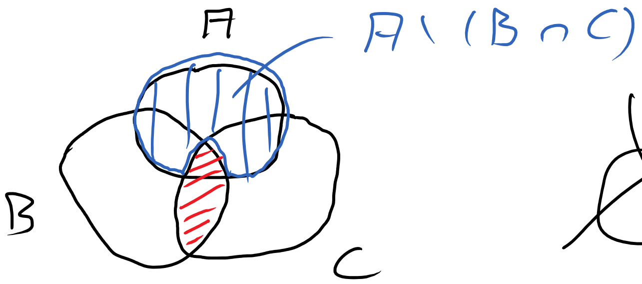
Tutorium: Fr, $16^{00} - 17^{30}$, 3.110, startet ab 27.10.

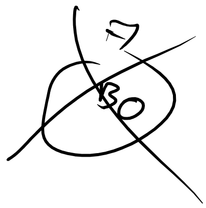
Mengen

$\{1, 2, 3\}$

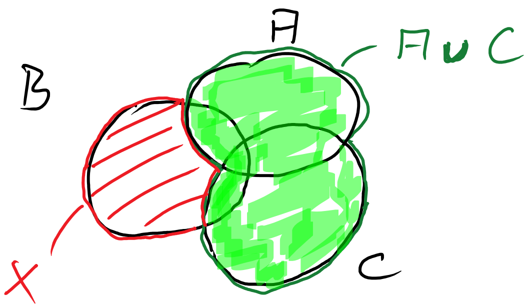
Venn-Diagramme

$A \setminus (\underline{B \cap C})$





$X = B \setminus (\underline{A \cup C})$



Aussagen A, C Operatoren $\vee$, $\wedge$	
Mengen A, C Operatoren $\cup$, $\cap$ "vereinigt" "geschnitten"	

$\{1,2,3,4\} \setminus \{3\} = \{1,2,4\}$

"ohne"

Schreibweise für Zahlmengen und Intervalle

$\{x \in \text{Obermenge} \mid \text{Aussageform in } x\}$

"für die gilt"

Intervalle sind Mengen. Intervall heißt implizit: $x \in \mathbb{R}$

$[3,4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \wedge x \leq 4\}$

$]3,10]$

$= (3,10] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \wedge x \leq 10\}$

Übung

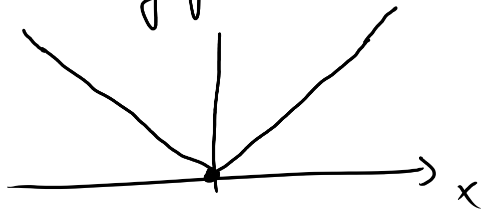
c sei reelle Zahl, i.d.R < 5

Intervall	Menge	Beschreibung
$(c,-5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid c < x < -5\}$	offenes Intervall aller $x \in \mathbb{R}$ zw. c u. -5
$(-10,-8]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x \leq -8\}$	halboffenes " " " " -10 u. -8
$(0,5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$	offenes Intervall aller $x \in \mathbb{R}$ zw. 0 u. 5
$(0,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $= \{x \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$	alle positiven reellen Zahlen

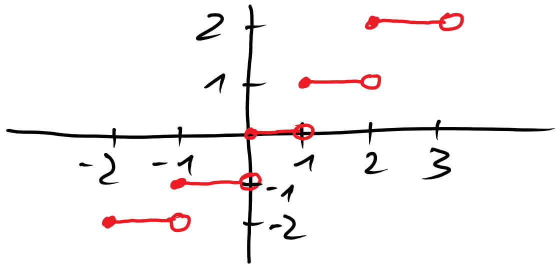
runde Klammer, weil $\pm\infty$ keine Zahl

Spezielle Funktionen

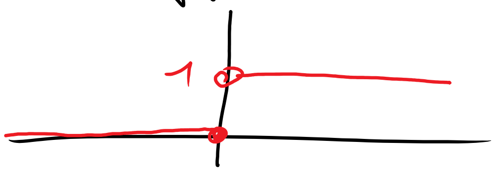
(1) Betragsfkt $|x|$



(2) Gauss-Klammer $\lfloor x \rfloor$

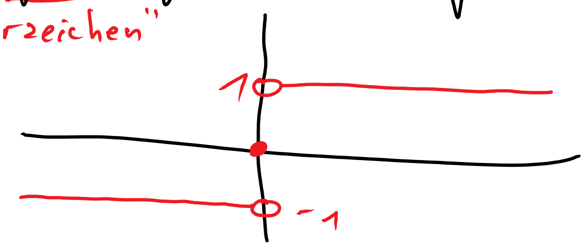


(3) Sprungfunktion



(4) Signumfunktion $\mathrm{sgn}(x)$

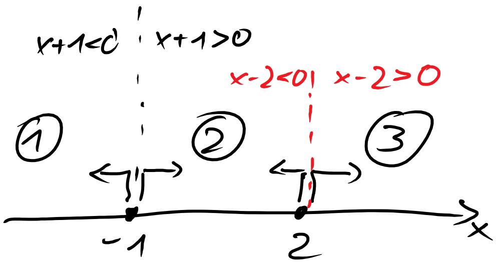
"Vorzeichen"



Betragsgleichungen lösen

Aufgabe: Löse $\underbrace{|x+1|}_{-1} = 2\underbrace{|x-2|}_{2}$

Umschlagspunkt: -1 $\quad$ 2



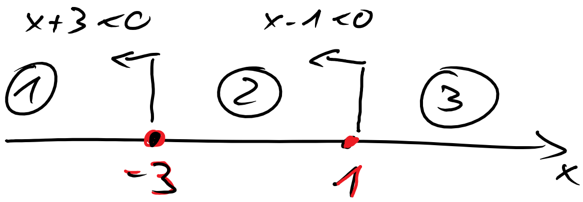
Fall ① $x+1<0$: $-(x+1) = -2(x-2) \Leftrightarrow -x-1 = 4-2x \Leftrightarrow x=5$ ↯

Fall ② $\left.\begin{matrix} x+1>0 \\ \wedge\ x-2<0 \end{matrix}\right\}$: $x+1 = -2(x-2) \Leftrightarrow x+1 = 4-2x \Leftrightarrow 3x = 3$
$\Leftrightarrow x = 1$ ✓

Fall ③ $x-2>0$: $x+1 = 2(x-2) \Leftrightarrow x+1 = 2x-4 \Leftrightarrow -x = -5$
$\Leftrightarrow x = 5$ ✓

$$L = \{1, 5\}$$

Ü $\quad \underbrace{|x-1|}_{1} - 3\underbrace{|x+3|}_{-3} = 1$ $\quad$ sind Umschlagspkte



① $x+3<0$: $-(x-1) - (-3(x+3)) = 1$

$\Leftrightarrow -x+1+3x+9 = 1 \Leftrightarrow 2x+10 = 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{9}{2}}}$
$= -4.5$ ✓

② $\left.\begin{matrix} x+3>0 \\ \wedge\ x-1<0 \end{matrix}\right\}$: $-(x-1) - 3(x+3) = 1 \Leftrightarrow -4x - 8 = 1$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{9}{4}}}$ ✓
$= -2.25$

③ $x-1>0$: $(x-1) - 3(x+3) = 1 \Leftrightarrow -2x-10 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$ ↯

$$L = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right\}$$

Ü Faktorenzerlegung

a) $x^2 - 25 = 0$

b) $x \ln(x^2+1) + x^2 \ln(x^2+1) = 0$

c) $x \ln(x) + x^2 \ln(x^2) = 0$

Lsg (a) 3. Binomi: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, hier $a = x$, $b = 5$

$$x^2 - 5^2 = (x-5)(x+5) = 0 \iff x-5=0 \lor x+5=0$$

$$\iff x = 5 \lor x = -5$$

$$L = \{-5, 5\}$$

(b) $x \ln(x^2+1) + x^2 \ln(x^2+1) = 0$

$$\underbrace{x}_{a} \cdot \underbrace{(1+x)}_{b} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{c} = 0 \iff x = 0 \lor 1+x=0 \lor \ln(x^2+1)=0$$

$\iff x = 0$

$\iff x = -1$

$\iff x = 0$

Zu $\ln(x^2+1) = 0 \quad | \, e^{()}$

$x^2 + 1 = 1 = e^0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow L = \{-1, 0\}$

$\ln(x^2) = 2\ln(x)$

$= \ln(x \cdot x)$

$= \ln x + \ln x$

$= 2 \ln x$

(c) $x \ln(x) + x^2 \ln(x^2) = 0$

$x \ln(x) + 2x^2 \ln(x) = 0$

$x \cdot (1 + 2x) \cdot \ln(x) = 0$

Faktorregel $\iff$ $x = 0 \lor x = -\frac{1}{2} \lor x = 1$ sind Kandidaten

$L = \{1\}$ (weil 0 und $-\frac{1}{2}$ nicht im Def.ber. v. $\ln(x)$)

Betragsungleichungen

$$\underbrace{|x+1|}_{} > 4$$

-1 ist Umschlagspunkt, also Fallunterscheidung

① $x \leq -1: \quad -(x+1) > 4 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \quad x + 1 < -4$

$\Leftrightarrow \quad x < -5$ Also: $x \leq 1 \wedge x < -5 \Rightarrow x < -5$

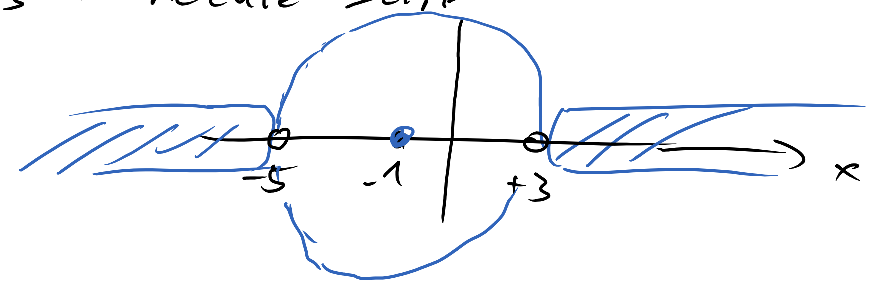
② $x > 1: \quad (x+1) > 4$

$\Leftrightarrow \quad x > 3$ Also: $x > 1 \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3$

$$L = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x > 3 \}$$

Alternative graphische Lösung:

Umschlagspunkt ist Zentrum eines Kreises mit Radius = rechte Seite



Quadratische Betragsungleichung

$$\boxed{a^2 > b^2 \Leftrightarrow |a| > |b|}$$

Beispiel $\quad \underbrace{(x+1)}_{a}{}^2 > \underbrace{16}_{4^2 = b^2}$

$\Leftrightarrow \quad |x+1| > 4 \quad \overset{\text{s.o.}}{\Leftrightarrow} \quad \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x > 3 \}$