V 25.10.2023

Mittwoch, 25. Oktober 2023 08:55

Orga:

Ü	16	70	10
	Di	Mi 13	Mi 18

nä Woche } Mi 1.11 → keine V
Ü Di findet statt
1 Ersatz-Ü Fr 10^{00} via Zoom } nur in Woche mit 1.11.

Tut startet Fr. 27.10. 16 Uhr, 3.110

V: Ausfall durch Feiertag 1.11. + durch HIP-Woche
→ Screencasts anstatt

Kap 2 Zahlsysteme

- Modulare Arithmetik → verschoben Ende Kap 3
- Summen: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ → s. Screencasts
- Produkt: $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

spez. Form: $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$ "n Fakultät"

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cancel{(n-k)}\cancel{(n-k-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\cancel{(n-k)}\cancel{(n-k-1)}\cdot\ldots\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$ nur für $k>0$

Bsp:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(0)!} = 1$$

$$\underline{\underline{\binom{n}{k}}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{k!}_{(n-(n-k))!}} = \underline{\underline{\binom{n}{n-k}}}$$

Symmetrie der Bin. koeff.

$$\binom{100}{98} \overset{\text{Symm.}}{=} \binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = \underline{\underline{4950}}$$

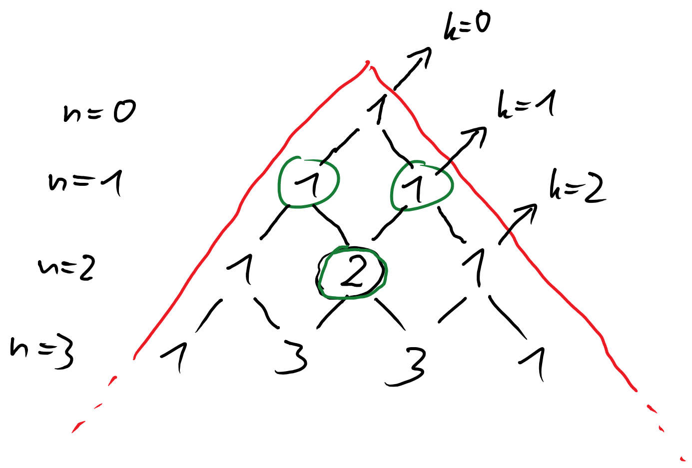
$$\binom{20}{10} = 184756$$ nur mit Additionstheorem

oder mit TR $20 \boxed{nCr} 10 = \binom{20}{10}$

Additionstheorem

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

z.B. $\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \binom{2}{1}$



Warum "1" am Rand?
Weil $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\binom{7}{k} \to$ 7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$(a+b)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^k b^{7-k} = 1\underbrace{a^0}_{1} b^7 + 7a^1b^6 + 21a^2b^5 + 35a^3b^4 + 35a^4b^3 + 21a^5b^2 + 7a^6b + 1a^7\underbrace{b^0}_{1}$$

Ü Vereinfache

a) $$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1}{(n-1)\cdot \ldots \cdot 1} = \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n = n^2+n$$

b) $$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{n}{n(n-1)!} = \frac{1}{n!} + \frac{n}{n!} = \frac{1+n}{n!}$$

HN: Hauptnenner

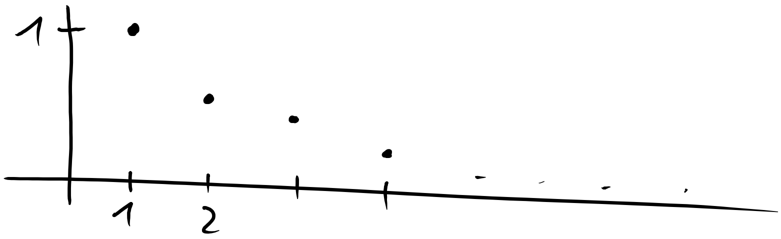
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\cdot 3!$$

Zahlenfolgen

Beispiele

a) $a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$



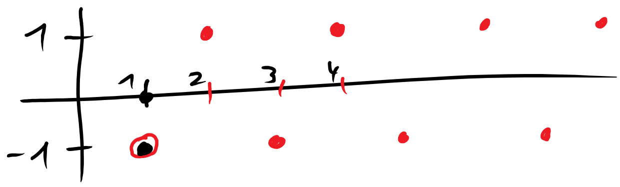
$(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

n.o.b. z.B. $K = 1$

n.u.b. z.B. $L = 0$

streng monoton fallend

b) $a_n = (-1)^n$ (alternierende Folge)

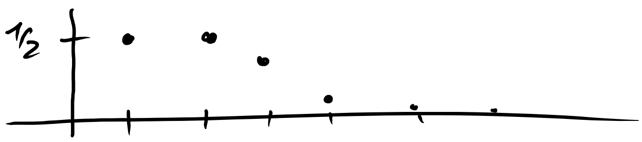


$(a_n) = -1, +1, -1, +1, \dots$

keine Monotonie

beschränkt, z.B. $K = +1$, $L = -1$

c) $a_n = \frac{n}{2^n}$



$(a_n) = \frac{1}{2}, \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\shortparallel}{\frac{2}{4}}}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots$

monoton fallend

beschränkt $L = 0$, $K = 1$

d) $a_n = n$

$(a_n) = 1, 2, 3, \dots$

unbeschränkt nach oben (n.o.b.)

n.u.b. $L = 0$

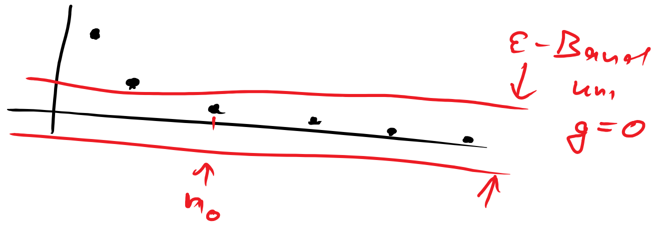
streng monoton wachsend

Bsp zu Folgen + Grenzwert

a) $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ "Nullfolge"

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$



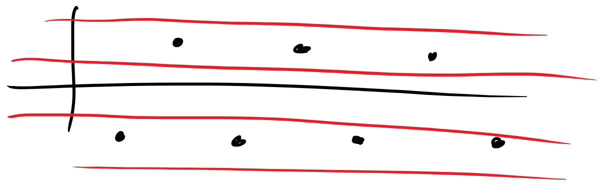
Beweis $|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} < \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} < n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Wähle z.B. } n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad ✓$$

b) $a_n = (-1)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht

divergent



c) $a_n = \frac{2n-1}{3n} = \frac{\cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(3)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} = g$ konvergent

$(a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \ldots$

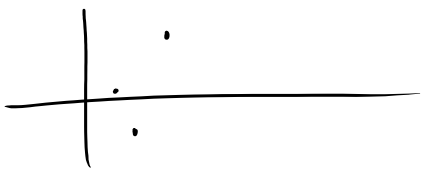
d) $a_n = n^2 + 5$ divergent

$(a_n) = 6, 9, 14 \ldots$ bestimmt-divergent

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ uneigentl. GW ist $+\infty$

e) $a_n = (-1)^n n^2$

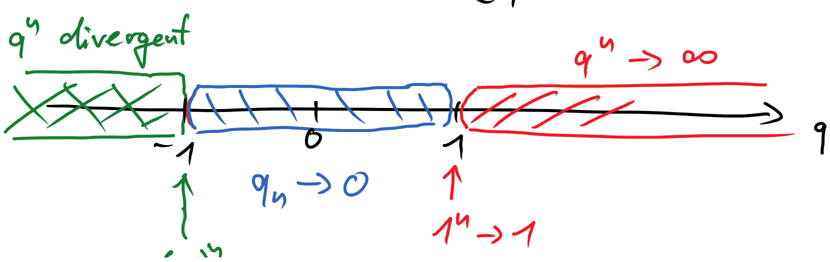
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ex. nicht



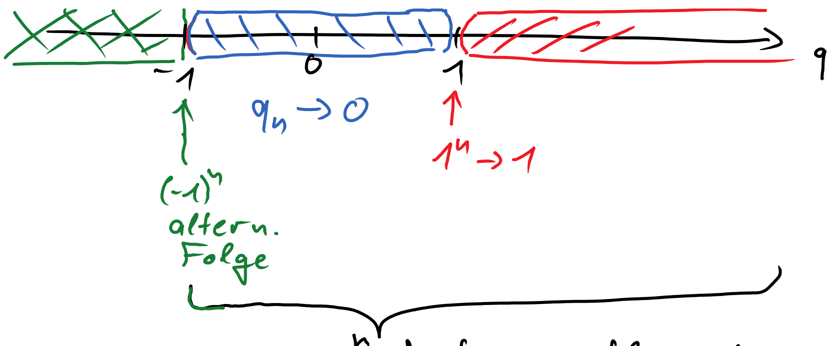
divergent, kein uneigentl. GW

f) Geometrische Folge q^n, $q \in \mathbb{R}$

in Abhängigkeit von q folgendes Grenzwert-Verhalten



Zins 1%	, Kapital K
1. Jahr	$K \cdot 1.01$
2. Jahr	$K \cdot 1.01 \cdot 1.01$
⋮	
n. Jahr	$K \cdot \underbrace{1.01}_{q>1}^{\,n}$



q^n hat eigentl. oder uneigentlichen GW

Bsp. wieso "$\infty - \infty$" unentscheidbar ist

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \\ b_n = 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n - b_n = n - 2n = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty \\ b_n - a_n = 2n - n = +n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{array}$$

$$\left.c_n = n+3 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \right\} \quad c_n - a_n = \underbrace{n+3}_{\infty} - \underbrace{n}_{\infty} = 3 = \text{G.W.}$$