V2023-11-08

Mittwoch, 8. November 2023 08:57

Orga

1) TUT : $15^{30} - 17^{30}$ jeden Freitag

2) Sprechstunde B. Breiderhoff für P-Orga
   - Mi, 12-13 : heute ausnahmsweise nur Zoom
     Link ILU

3) Wechsel in V+Ü zur Mitte Sem : ca. 6.12.
   Frau Ane Schmitter

Inhalte

Folgen

- Rechnen mit Grenzwerten
- Landau'sche O-Notation
- Modulare Arithmetik

Rechnen mit Grenzwerten

Beispiele

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}_{\text{Fundamentale Nullfolge}}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cancel{n^3}}{5\cancel{n^3}}\right) \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

Termumformung kürzen

Nach-Innen-Ziehen würde auf $\frac{\infty}{\infty}$ führen, geht also nicht

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{5n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{5n^3} = \frac{3}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+4n-5}{8n^2-3n+7} \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(-2+\frac{4}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(8-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}\right)} = \frac{-2}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

g.P.i.N.

0 0 0 0

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0+0 = \underline{\underline{0}}$$

f) $$\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot(n+1)}{n\cdot(n+1)} - \frac{n^2\cdot n}{(n+1)\cdot n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)-n^2\cdot n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}+n^2-\cancel{n^3}}{n^2+n}$$

g.P.i.N.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\,1}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \underline{\underline{1}}$$

Nach-Innen-Ziehen würde auf $\infty\cdot 0$ führen, geht also nicht

N.R. $$\frac{n^2}{n^2+n} = \frac{\cancel{n^2}(1)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Übungen Grenzwert

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2 = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2-1}{3n^2+2}\right)^2 \underset{\text{g.P.i.N.}}{=} \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(7-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}\right)^2$

$= \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

FALSCH $\cancel{\left(\frac{7n^2-1}{\ldots}\right)^2 = \frac{49n^4-1}{\ldots}}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n-1}\right) \underset{\text{H.N.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(n-1)-n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-n^3-(n^4+n^3)}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^3}{n^2-1}$

$\overset{\text{g.P.i.N.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(-2n)}{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{1} = -\infty$

4) Vorbemerkung 1) $\lim\limits_{k\to\infty}10^{-k} = \lim\limits_{k\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{10}\right)}_{|q|<1}^{k} = 0$ | 2) $10^{2k-2} = 10^{2k}\cdot10^{-2}$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{75\cdot10^k+6\cdot10^{2k}}{0.4\cdot10^{k-3}-20\cdot10^{2k-2}} \underset{\text{g.P.i.N.}}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\frac{\cancel{10^{2k}}\left(75\cdot10^{k-2k}+6\cdot\cancel{10^{2k-2k}}\right)}{\cancel{10^{2k}}\left(0.4\cdot10^{k-3-2k}-20\cdot\cancel{10^{2k-2k}}\cdot10^{-2}\right)}$

$= \lim\limits_{k\to\infty}\frac{75\cdot\underbrace{10^{-k}}_{\to0}+6}{0.4\cdot\underbrace{10^{-k}}_{\to0}\cdot10^{-3}-20\cdot10^{-2}} = \frac{6}{-0.2} = -30$

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{75}{10^k} = \frac{75}{\infty} = 0$

Fixpunkt-Iteration

Welches x löst $\boxed{x + 1 = \sin(x)}$?

Fixpunkt-Iteration $\quad x = \underbrace{\sin(x) - 1}_{f(x)}$ $\quad \boxed{x = f(x)}$ Fixpunktgleichung

$a_1 \qquad a_0$

n	a_n	$a_{n+1} = f(a_n)$
0	1	$\sin(1) - 1 = -1.841 = a_1$
1	-1.841	$\sin(-1.841) - 1 = -1.963$
2	-1.963	-1.923
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	-1.934	-1.934

Fixpunkt gefunden

$x = -1.934$ löst näherungsweise $x + 1 = \sin(x)$

Wieso quick & dirty ?

$$x + 1 = \sin(x) \quad | \arcsin()$$

$$\underbrace{\arcsin(x+1)}_{f'(x)} = x$$

funktioniert leider nicht

Landau - O-Notation

$\boxed{2^n \text{ wächst stärker als jede Potenzfunktion } n^k, k \text{ bel.}}$

Denn: Die Folge $a_n = 2^n$ wächst in jedem Schritt um 100%

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = 1+1 \text{ (Zuwachs ist 100\%)}$$

Die Folge n^k hat Zuwachs $\frac{k}{n}$

$$\frac{(n+1)^k}{n^k} = \frac{n^k + k n^{k-1} + \ldots}{n^k} = 1 + \frac{k}{n} + \ldots$$

Zuwachs $\frac{k}{n}$ geht für große n gegen 0

" 1 bei 2^n geht für kein n gegen 0

Übung Landau

	Folge	$\mathcal{O}()$
1)	$2n^3 - n^2$	$\mathcal{O}(n^3)$
2)	$7n^5 + 26n^6$	$\mathcal{O}(n^6)$
3)	$n + 3n^2 - 2n\log(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$
4)	$\frac{n^4+n^2}{n+5}$	$\mathcal{O}(n^3)$
5)	$\frac{n^4+n^2}{n+5} - n^3$	

zu 4)

$\mathcal{O}(n^3)$

$$\frac{n^4+n^2}{n+5} = \frac{n^4(1+\frac{1}{n^2})}{n(1+\frac{5}{n})} \in \mathcal{O}(n^3)$$

n^3

Hypothese: $\mathcal{O}(n^3)$, denn $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{n^4+n^2}{n^3 \cdot (n+5)}\right| = \frac{\cancel{n^4}(1+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^4}(1+\frac{5}{n})}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \checkmark$$

zu 5)

$$\frac{n^4+n^2}{n+5} - n^3 = \frac{n^4+n^2 - n^3(n+5)}{(n+5)} = \frac{\cancel{n^4} + n^2 - \cancel{n^4} - 5n^3}{n+5}$$

$$= \frac{-5n^3 + n^2}{n+5} \in \mathcal{O}(n^2)$$

Hypothese: $\mathcal{O}(n^2)$, denn $\frac{-5n^3+n^2}{n^2(n+5)} = \frac{-5n^3+n^2}{n^3+5n^2}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} -5 \quad \checkmark$$