

Modulare Arithmetik

modulo : Division mit Rest

$$\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \bmod 2 = 0\}$$

gerade Zahlen

Konvertieren zu anderem Zahlensystem (z.B. Oktal)

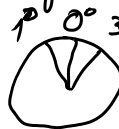
Sortieralgo, wenn Platz belegt

Kryptographie

Prüfziffern

im Alltag: Uhr: modulo 12 : 13 Uhr $\equiv$ 1 Uhr

Richtung, Kompass: Gradangaben



$$365^\circ \equiv 5^\circ$$

$$360^\circ \equiv 0^\circ$$

mod - Operator

$$a, b, m, r \in \mathbb{Z}$$

$$a \bmod m = r$$

$$\leftarrow r \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$a = b \pmod{m}$$

$$\leftarrow a, b \text{ beliebig } \in \mathbb{Z}$$

Rechnen mit mod

$$a \bmod m = a + km \bmod m$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Bsp $-8 \bmod 11 = -8 + 11 \bmod 11 = 3 \bmod 11 = \underline{\underline{3}}$

NICHT "Kürzen" oder Gleichung auf beiden Seiten dividieren

$$a \cdot b = c \cdot b \pmod{m} \quad | : b$$

~~$$\Rightarrow a = c \pmod{m}$$~~ **FALSCH**

$$2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod{6}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{denn } 8 \bmod 6 = 2 \\ 20 \bmod 6 = 2 \end{array} \right)$$

$$\text{ABER } 2 \neq 5 \pmod{6}$$

Potenzieren

$$a^c = b^c \pmod{m}$$

$$\text{Bsp. } 50^{100} \pmod{7}$$

$$= 1^{100} \pmod{7}$$

$$= 1 \pmod{7} = \underline{\underline{1}}$$

$$\text{wenn } a = b \pmod{m}$$

$$50 = 49 + 1 \pmod{7}$$

$$50 = 1 \pmod{7}$$

Prüfziffern

Bsp: Was ist richtiges p für ISBN 3-446-19873- p ?

Lösung: $10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{250} + p = 0 \pmod{11}$$

$$\underbrace{250}_{220+22+8}$$

$$8 + p = 0 \pmod{11} \quad | +3$$

$$11 + p = 3 \pmod{11}$$

$$\underline{\underline{p = 3 \pmod{11}}}$$

Die vollständige ISBN ist 3-446-19873-3

Für große Zahlen Rest rechnen mit TR

$$261 \pmod{11} ?$$

$$TR: 261 : 11 = 23.\overline{72}$$

$$\underline{-23}$$

$$\underline{\underline{0.\overline{72} \cdot 11 = 8}}$$

Übung Ist 3-446-91873-3 gültige ISBN?

$$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 3 + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$261 = 0 \pmod{11}$$

$$8 = 0 \pmod{11} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ ISBN ist ungültig

Übung (+) Für welche x ist $x-446-91873-3$ gültig / ungültig?

$$10 \cdot x + 9 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 3 + 3 = 0 \pmod{11}$$

$$10 \cdot x + \underbrace{231}_{220+11} = 0 \pmod{11}$$

$$10x = 0 \pmod{11}$$

Nur für $x=0$ scheinbar gültige ISBN

Für alle anderen wird "ungültig" korrekt erkannt

x	$10x$	
0	0	✓
1	10	
2	20	
3	30	
4	40	
5	50	✗
6	60	
7	70	
8	80	
9	90	

Reelle Funktionen

Bsp Grenzwert Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

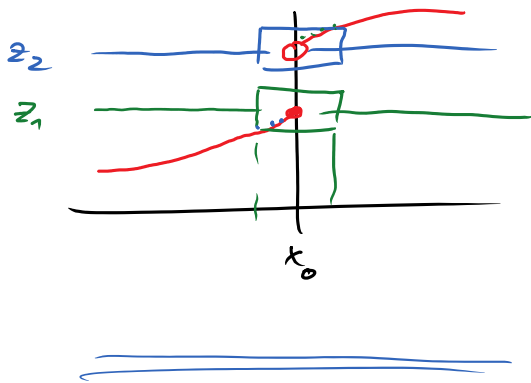
Was passiert wenn x gegen 0 strebt?

x	± 0.3	± 0.2	± 0.1	± 0.01
$f(x)$	0.985	0.993	0.998	0.99998

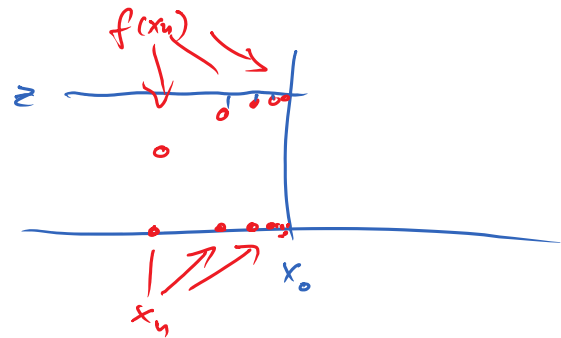
Hypothese $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Wie kann man das formal genauer begründen

Bsp für Funktion, die bei x_0 keinen GW hat



Grenzwert über Folgen



Weitere Bsp Grenzwert Fkt

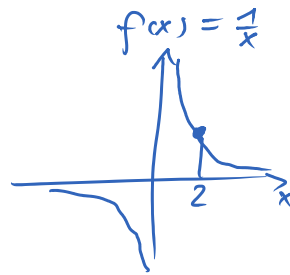
1) $f(x) = c$ (konstante Fkt) hat überall (für alle x_0) den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

2) $f(x) = \frac{1}{x}$ hat bei $x_0 = 0$ keinen Grenzwert

Gegenbeispiel über Satz 4.2:

Nehme $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = x_0$

$$f(x_n) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow \text{kein GW}$$



3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Beweis: Anleihe aus Kap 5 (Taylorpolynom für $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

4) Für alle "gängigen" Funktionen

$f(x) = x^r, a^x, \log(x), \sin(x), |x|$ usw gilt:

Dort wo $f(x_0)$ definiert ist, ist $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Übung Grenzwerte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x+1) \cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1} \right]$$

$$= 2 \cdot \cos(0) + \frac{\sin(0)}{2}$$

$$= 2 \cdot 1 + \frac{0}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right]$$

H.N.

$$\downarrow = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x+x+2 - (x^2+2x+3)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x} - 1}{(\cancel{x-1})(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{einsetzen} \end{matrix} \quad \frac{1}{1+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3}{0} - \frac{6}{0} \quad \downarrow$$

Hauptnenner

 $(x-1)(x^2-1)$ zu großbesser $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ $\Rightarrow$ H.N. ist $(x-1)(x+1)$