

Orga nächste Woche HIP-Woche: keine MA1-V, -Ü, -P

Screencasts für Teile von Diff in ILU.

Ab der Woche danach 5.12.: Ane Schmitter V+Ü

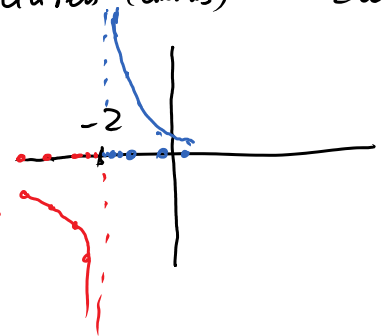
Grenzwerte von Funktionen

Bsp 1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$ $x_0 = -2$ einsetzen $\frac{2}{0} = \pm \infty$

Wir unterteilen in links- und rechtsseitigen Grenzwert, d.h. wir nehmen eine Folge x_n die "von unten (links)" bzw. von oben (rechts) gegen 2 strebt:

a) von links ($x_n < -2$)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + 2x_n + 2}{x_n + 2} = \frac{2}{0-} = -\infty$$



b) von rechts ($x_n > -2$)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2} = \frac{2}{0+} = +\infty$$

Ü 2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 2)^2} = \frac{2}{0+} = \underline{\underline{+\infty}}$

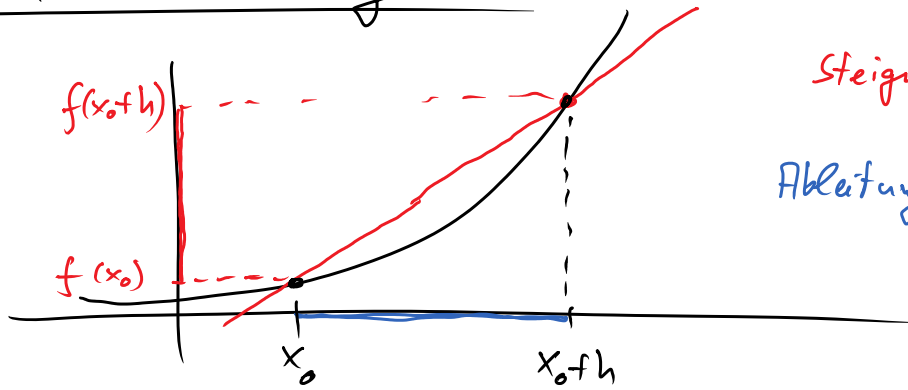
Nenner immer positiv

3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 2)} = \frac{0}{0}$ $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$

4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \underline{\underline{2x}}$

Differentialquotient von x^2 (Ableitung)

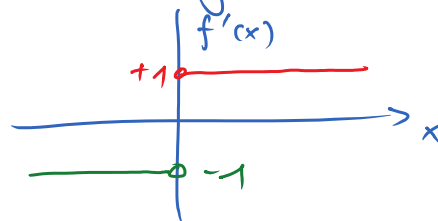
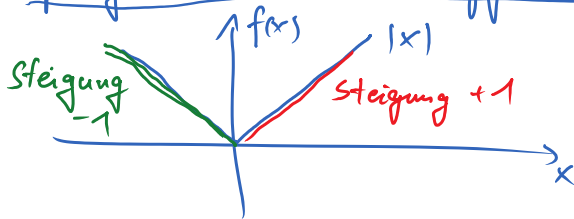
Differentialrechnung



Steigung $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0}$

Ableitung $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Bsp für Nicht-Diffbarkeit : $f(x) = |x|$ an der Stelle $x=0$



Bsp Quotientenregel

$$\text{I} \quad f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad \text{Was ist } f'(x)?$$

$$= \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{vu' - v'u}{v^2} = \frac{(x+1)2x - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Bsp. Kettenregel

$$h(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)^2 = g(f(x))$$

$$h'(x) = g'(u)|_{u=f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= 2 \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

$$(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$$

$$(x+1)' = 1$$

Summenregel

$$\text{N.R.} \quad \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v = x+1 & v' = 1 \end{array}$$

$$\text{N.R.} \quad \begin{array}{ll} g(u) = u^2 & \Rightarrow g'(u) = 2u \\ f(x) = \frac{x^2}{x+1} & \xRightarrow{\text{s.o.}} f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{array}$$

Bsp 2 Kettenregel

$$h(x) = g(f(x)) = (\sin x)^3$$

$$h'(x) = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

$$\text{Bsp 3 : } f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\begin{array}{l|l} g(u) = u^3 & g' = 3u^2 \\ f(x) = \sin(x) & f'(x) = \cos(x) \end{array}$$

$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^5} = (x+1)^{-5}$$

$$g'(x) = -5(x+1)^{-6} \cdot 1$$

$$= \frac{-5}{(x+1)^6}$$

ü

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 \cdot 3x^2 - 2(x+1) \cdot x^3}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(x+1) 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

b) $g(x) = \sin(x^3)$

$$= \cos(x^3) \cdot 3x^2$$

c) $h(x) = e^{\sin(x^2)}$

$$= e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

NR. Quotientenregel

$$u = x^3 \quad u' = 3x^2$$

$$v = (x+1)^2 \quad v' = 2 \cdot (x+1)$$

$$w = (3x+1)^2 \Rightarrow w' = 2(3x+1) \cdot 3$$

NR Kettenregel

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$$

$$h(u) = \sin(u) \quad h'(u) = \cos(u)$$

$$g(w) = e^w$$

$$g' = e^w$$

$$f_1(w) = \sin(w)$$

$$f_1' = \cos(w)$$

$$f_2(x) = x^2$$

$$f_2' = 2x$$

Taylorpolynom

$$f(x) = \ln(x) \quad x_0 = 1$$

Gesucht: Taylorpolynom 3. Grades um $x_0 = 1$; damit Funktionswert bei $x = 1.5$ approximiere

Lsg

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(x)$	0
1	x^{-1}	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$2x^{-3}$	2
4	<u>$-6x^{-4}$</u>	

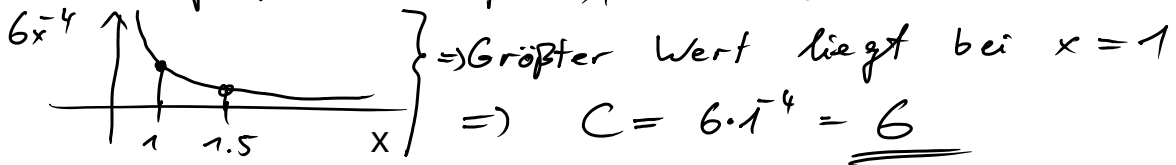
$$P_3(x-1) = \overset{0}{\ln(1)} + \overset{1}{1}(x-1) + \frac{\overset{-1}{-1}}{2}(x-1)^2 + \frac{\overset{2}{2}}{3!}(x-1)^3$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$P_3(1.5-1) = \dots = 0.41\bar{6}$$

Restgliedabschätzung

C: Wie groß kann $|f^{(4)}(x)|$ in $x \in [1, 1.5]$ höchstens werden



$$|R_3(x)| = \frac{6}{4!} |1.5-1|^4 = \underline{\underline{0.0156}}$$

$$\left[|\ln(1.5) - 0.41\bar{6}| = 0.01120 \right]$$

ii Taylorpolynom

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$+\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	///

;

Aufgabe

$\sin(x)$ bei $x_0=0$ in Taylor poly
5. Grades. Restglied für $x=0.3$

Lsg: $P_5(x) = \underline{1x^1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5}$

$$P_5(0.3) = \dots$$

$$\text{Restglied } |R_5(0.3)| = \frac{C}{6!} |0.3|^6$$

Was ist C ? $|\sin(x)|$ ist
immer $\leq 1 \Rightarrow$ Wähle $C=1$

$$|R_5(0.3)| = \frac{1}{6!} 0.3^6 = 2.99 \cdot 10^{-7}$$