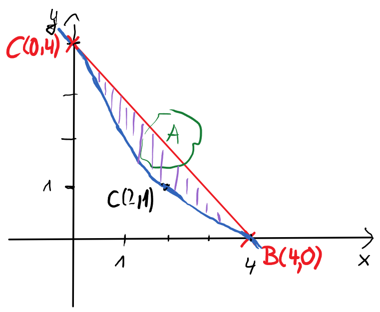
Mathematik 6.12.2023

Info: In der Woche vor Weihnachten, am 20.12.23 findet die Vorlesung online per Zoom statt.
Die Übung am 19.12.23 auch.
Einwahldaten für beide Veranstaltungen in ILU

Meine Themen: Lineare Algebra
Integralrechnung

Begriffe: Linearität, Vektoren, Matrizen, Lineare Gleichungssysteme (Lin. GS), Determinanten

Bp:



$y = \underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + \underline{c}x^2 + \underline{d}x + \underline{e}$

Ziel: a, b, c, d, e bestimmen

Fragestellung:

- Lin. Alg. – Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Umgehungsstraße
- Integralrechnung – Berechnen Sie die Fläche zwischen alter und neuer Straße

Also: 5 Unbekannte bestimmen $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Punktprobe mit $C(0,4)$: $4 = a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e$

$\Rightarrow \boxed{e = 4}$

Punktprobe mit $B(4,0)$: $0 = a\cdot 4^4 + b\cdot 4^3 + c\cdot 4^2 + d\cdot 4 + e$

$0 = 256a + 64\cdot b + 16c + 4d + 4$ (da $e=4$)

$\Rightarrow \boxed{256a + 64b + 16c + 4d = -4}$

Punktprobe mit $D(2,1)$ $1 = a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e$

$\Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d + 4 = 1$

$\Rightarrow \boxed{16a + 8b + 4c + 2d = -3}$

Ableitung: $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ Steigung der geraden Straße: -1

$y'(0) = -1$ $\quad -1 = 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2\cdot c\cdot 0 + d$

$\Rightarrow \boxed{d = -1}$

$y'(4) = -1$ $\quad -1 = 4\cdot a\cdot 4^3 + 3b\cdot 4^2 + 2c\cdot 4 + d$

$\rightarrow 256a + 48b + 8c - 1 = -1$

$\Rightarrow \boxed{256a + 48b + 8c = 0}$

Damit ergibt sich folgendes GS:

$$\begin{aligned} 16a + 8b + 4c &= -1 \\ 256a + 64b + 16c &= 0 \\ 256a + 48b + 8c &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -1 \\ 256 & 64 & 16 & 0 \\ 256 & 48 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Bem. $\underbrace{\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 256 & 64 & 16 \\ 256 & 48 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizienten-matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\text{Variablen-vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Lösungs-vektor}}$

Vorbem. zur "Linearen Unabhängigkeit"

Bp: 2 Brote und 4 Brötchen kosten 10 €
4 Brote und 8 Brötchen " 20 €

$$2b_1 + 4b_2 = 10$$
$$4b_1 + 8b_2 = 20$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 20 \end{array}\right) - 2 \times 1.\text{Zeile}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

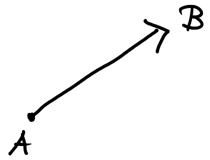
Fazit: Ein Lin. GS wird durch äquivalente Umformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix gelöst.
(Gauß'sche Lösungsalgorithmus)

Vorschau: Flächenberechnung : $\int_0^4 (\underbrace{\text{Gerade Straße}}_{g(x) = -x+4} - \underbrace{\text{Umgehungsstraße}}_{f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x + 4})\,dx$

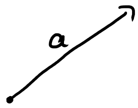
→ später genauer

Einführung in die Vektorrechnung

Vektor : Maßzahl + Richtung

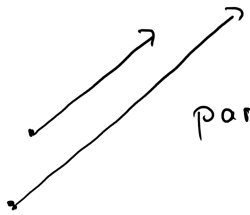


$\overrightarrow{AB}$

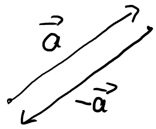


$\vec{a}$

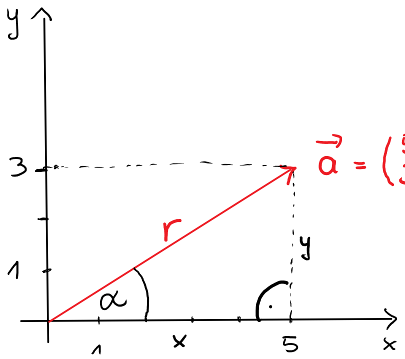
freie Vektoren (noch keine Orientierung)



parallele Vektoren



inverse Vektoren



$\vec{a} = \binom{5}{3}$ Koordinatendarstellung

Länge des Vektors: $r^2 = 5^2 + 3^2$
$|\vec{a}|$
$\Rightarrow r = \sqrt{5^2 + 3^2}$

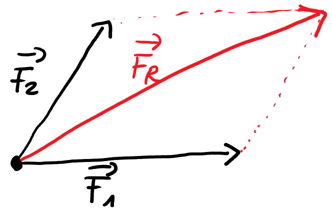
Winkel α : $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{3}{5}$
$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{3}{5} \approx 31^0$

Weitere Begriffe: Nullvektor : $\vec{0}$ Länge 0
Einheitsvektor : $\vec{e}$ Länge 1

Vektoroperationen

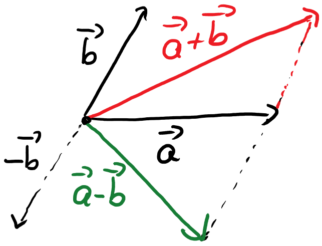
1) Addition

Bp aus der Physik



Kräfteparallelogramm

daraus resultiert die Regel für die Vektoraddition:

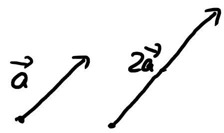


gerichtete Diogonale im Parallelogramm

2) Multiplikation mit einem Skalar:

geg: $\vec{a}$ Was bedeutet: $2\vec{a}$?

Vektor ist doppelt so lang



Geg: $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda\vec{a}$ hat die Länge $\lambda \cdot |\vec{a}|$

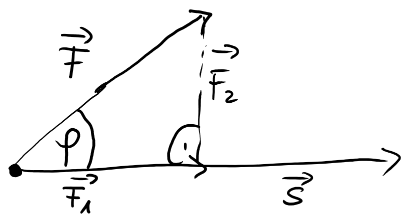
Frage: Gibt es bei den Vektoren auch eine Multiplikation wie in $\mathbb{R}$? Nein

Andere Produkte:

3) Skalarprodukt

Ergebnis ist ein Skalar, also eine Zahl und kein Vektor

Herleitung:



$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

Arbeit $W = |\vec{F_1}| \cdot |\vec{s}|$ (Kraft $\times$ Weg)

$\cos\varphi = \frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F}|}$ $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ $\Rightarrow \vec{F_1} = |\vec{F}| \cdot \cos\varphi$

$\Rightarrow W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi$

Def: $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren $\varphi = \measuredangle \vec{a}, \vec{b}$ $0 \leq \varphi \leq \pi$

$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ In Zeichen: $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Frage: Falls $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

Antwort: $\varphi = 90°$, da $\cos 90° = 0$

Eigenschaften des Skalarprodukts: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} > 0$ falls $\vec{a} \neq 0$

bitte überprüfen: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ Distributivgesetz ?

- bitte überprüfen: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$?

Bp: geg: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$ * $\vec{b} \cdot \vec{b} = 25$ * $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$

gesucht: $\measuredangle\, \vec{a}, \vec{b}$

Aus * $|\vec{a}| = 4$ $|\vec{b}| = 5$

$$15 = 4 \cdot 5 \cdot \cos \varphi$$

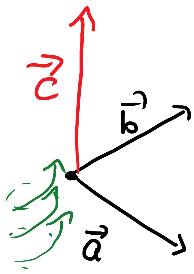
$$\cos \varphi = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \varphi = 41{,}4^0$$

Hinweis auf Vektorprodukt:

$\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{c}$ mit $|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin \varphi = |\vec{c}|$

$\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein sog. Rechtssystem:



Vektorrechnung mit Koordinaten

Vorbem: $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} \Rightarrow 3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$

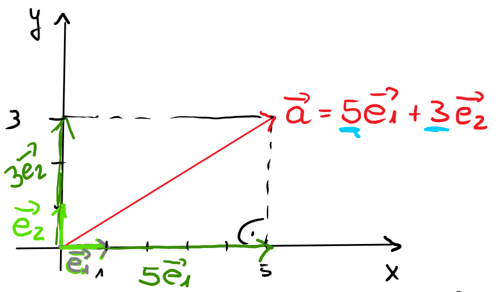
Der Nullvektor kann als Linearkombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden: $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig

Linearkombination: $\vec{a} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \ldots + \lambda_n \vec{b_n}$

$\vec{a}$ ist Linearkombination von $\vec{b_1}, \ldots \vec{b_n}$

Def: Linear unabhängige Vektoren

Der Nullvektor lässt sich nicht als Linearkombination darstellen, nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$ (trivial)



$= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Koordinaten beziehen sich auf $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$

$\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$ $\quad \perp$ sind senkrecht zueinander

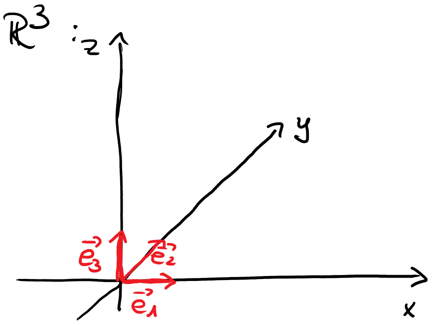
$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ lin. unabhängig

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ Basis des $\mathbb{R}^2$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verhältnisse in $\mathbb{R}^3$:



Bp: $3\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 1 \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis des $\mathbb{R}^3$

Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^4$

Tripel Quadrupel n-Tupel

Spaltenvektor

$(a_1 \, \ldots\ldots \, a_n)$

Zeilenvektor

Addition von Vektoren in der Koord.schreibweise

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Skizzieren Sie $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ in der Ebene und zeigen Sie, dass die Koordinatenaddition mit der Vektoraddition übereinstimmt.

Achtung: Es ist nur Addition von Vektoren mit derselben Dimension erlaubt.