

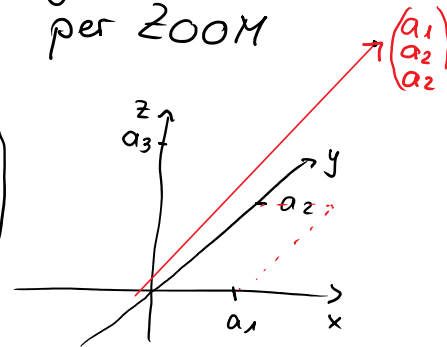
Mathematik 1 13. 12. 2023

nächste Woche: Übungen und Vorlesung nur online

Addition / Subtraktion von Vektoren höherer Dimension per ZOOM

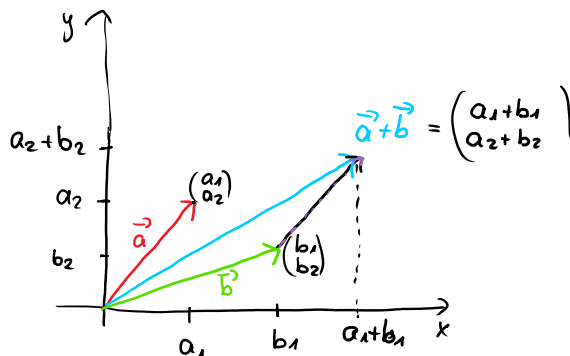
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$



3 D ist vorstellbar

Bp: $n=2$



Bp: 1 Vektor wird verlängert, der andere bleibt, wie sieht die Addition aus?

$$\lambda \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Def: Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar von n -dimensionalen Vektoren ergeben wieder n -dimensionale Vektoren, die Gesamtheit all dieser bildet einen n -dimensionalen Vektorraum V

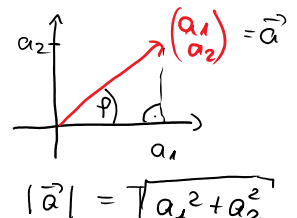
$$\dim V = n$$

Bem: n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis von V

Def: Länge eines Vektors

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$



$$|\vec{e}_i| = 1$$

$$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n \quad \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ten Stelle}$$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 49 + 81 + 100}$$

$$= \sqrt{255}$$

Def: Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Bp: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 5 \cdot 1 + 7 \cdot 9 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 4 \\ &= 5 + 63 + 32 = 100 \end{aligned}$$

Def: Vektorprodukt in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Def: Orthogonale Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \text{ sind orthogonal} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Def: Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$|\vec{a}|$$

$$|\vec{b}|$$

$$\varphi = \angle \vec{a}, \vec{b}$$

Matrizenrechnung

Bp: Klimadaten eines Jahres

12 Monate jeweils Temperatur, Regentage etc.

Tabellen mit Spalten

Def:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & \dots & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeile zuerst
Spalte später

i -ten Zeile
 j -ten Spalte

a_{ij} heißen Elemente der Matrix
 i : Zeilenindex j : Spaltenindex

Spaltenüberschriften und Zeilenüberschriften sind notwendig, wenn angewandte Aufgaben zu lösen sind.

A heißt $(m \times n)$ -Matrix

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix

A quadratisch $\Leftrightarrow m=n$ Zeilenzahl = Spaltenzahl

A ist eine $(m \times m)$ - bzw. $(n \times n)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

$$a_{ij} \neq 0 \text{ für } i = j$$

Einheitsmatrix $E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Bp: E in $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(3x3)-Matrix

Die Transponierte einer Matrix

A sei $(m \times n)$ -Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zeilen werden zu Spalten
Spalten werden zu Zeilen

Es gilt $(A')' = A$

Sei A Diagonalmatrix, dann $A = A'$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 4 & 0 \\ 10 & 16 & 10 & 2 \\ -4 & 5 & 14 & 18 \end{pmatrix}$
 3×4

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 16 & 16 & 5 \\ 4 & 10 & 14 \\ 0 & 2 & 18 \end{pmatrix}$
 4×3

Symmetrische Matrizen

A symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$

$a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, m$

Bp: $\begin{pmatrix} 10 & 18 & 14 & 12 \\ 18 & 4 & 7 & 1 \\ 14 & 7 & 6 & 30 \\ 12 & 1 & 30 & 11 \end{pmatrix}$

Vor: A quadratisch

Bem: $A' = -A$

A schiefsymmetrisch

Die Hauptdiagonale besteht aus Nullen $a_{ij} = -a_{ji}$
für $i = j$ nur
für $a_{ii} = 0$

Dreiecksmatrizen

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 11 & 13 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Bp für eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 & 11 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bp für eine obere Dreiecksmatrix

Untermatrizen

Def anhand eines Beispiels:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 13 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 16 & 21 & 9 & 11 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4×5

$$M = \{1, 2, 3, 4\} \text{ Zeilennummern}$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ Spaltennummern}$$

$$I \subset M \text{ mit } I = \{2, 4\} \text{ Auswahl 2. + 4. Zeile}$$

$$J \subset N \text{ mit } J = \{1, 5\} \text{ Auswahl 1. + 5. Spalte}$$

Untermatrix mit

Auswahl I und J

$$B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

→ genau später

Rechnen mit Matrizen

Sei A, B $(m \times n)$ -Matrizen, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bem: Es gilt: $A + B = B + A$

kommutativ

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

assoziativ

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

distributiv

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$A + 0 = A$$

Zu Hause ein Beispiel konstruieren: $(A \pm B)' = A' \pm B'$

Multiplikation von Matrizen

Bp: Autofirmen A, B, C produzieren Kleinwagen (K)
Mittelklassewagen (M)
Oberklassewagen (O)

$$A^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} K & M & O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(3x3)-Matrix

$$B^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2017 & 2018 & 2019 & 2020 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ M \\ O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(3x4)-Matrix

Frage: Wie stellen sich die Einnahmen der Firmen in den Jahren 2017-2020 dar?
Gibt es eine Tabelle?

1. Betrachtung der Firma A im Jahr 2017:

$$1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = 53400000$$

Skalarprodukt aus Zeile 1 von A^* und Spalte 1 von B^* = 53,4 Mio

Fortsetzen der Betrachtungen: Firma A im 2018
Firma A im 2019
...

Firma B im 2017
...

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 2017 & 2018 & 2019 & 2020 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 53,4 & 54,75 & 56,25 & 59,0 \\ 51,85 & 53,1 & 54,65 & 57,3 \\ 57,53 & 59,1 & 60,55 & 63,5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(3 x 4) Matrix

Frage: Wie kommt man auf die 60,55
3. Zeile · 3. Spalte Skalarprodukt

Def: Matrizenmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(m x n)-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

(n x l)-Matrix

Anzahl Spalten A = Anzahl Zeilen B

$$A \cdot B = C \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

(m x l)-Matrix

$$c_{ij} = \underset{\substack{\text{i-te Zeile} \\ \text{von A}}}{A_i} \cdot \underset{\substack{\text{j-te Spalte} \\ \text{von B}}}{B_j}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Frage: Welche Produkte können Sie aus folgenden Matrizen bilden?

A (3x4)-Matrix

B (5x4)-Matrix

C (4x5)-Matrix

B' (4x5)-Matrix

$$\underset{3 \times 4}{A} \cdot \underset{4 \times 5}{C} = (3 \times 5)$$

$$\underset{5 \times 4}{B} \cdot \underset{4 \times 5}{C} = (5 \times 5)$$

$$\underset{4 \times 5}{C} \cdot \underset{5 \times 4}{B} = (4 \times 4)$$

$$A \cdot B' = (3 \times 5)$$

Frage: gilt $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
das Assoziativgesetz?

→ Aufgabe für zu Hause

Bem: Es gilt: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$\lambda(A \cdot B) = \lambda A \cdot B = A \cdot \lambda B \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Unterschiede zur Multiplikation in $\mathbb{R}$:

$$\text{In } \mathbb{R}: a^2 = a \Rightarrow a = 1 \text{ oder } a = 0$$

Bei Matrizen: $A^2 = A \cdot A$ mit $A \neq E$, $A = 0$

$$\text{Bsp: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse einer Matrix

$$\text{In } \mathbb{R}: a \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{a} = a^{-1} \quad (a \neq 0)$$

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

Bei Matrizen: A ($n \times n$)-Matrix

B heißt inverse Matrix von $A \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A = E$

Schreibweise: $B = A^{-1}$

$\uparrow$
Einheitsmatrix

Besitzt A eine Inverse, dann heißt A regulär

" A keine " , " " A singulär

Bem: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse