

G

Vorlesung

Mathe 1

O

20.12.23

O

O

O

D

Mathe 1 20.12.23

ZOOM-Vorlesung

vor/nächste Vorlesung: Mi 10.1.24
Ort/nächste Übungen: Di 9.1.24 u. Mi 10.1.24
beim Wegner

Die Inverse einer Matrix

Sei A Matrix quadratisch

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

(Einheitsmatrix)

Wie berechnet man A^{-1} ?

geg: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ges: $A^{-1} = X = \overset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}}$

$$X = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = E$$

Unbekannten: x_{11} x_{12} x_{21} x_{22}

$$\text{I } a_{11} \cdot x_{11} + a_{12} \cdot x_{21} = 1$$

$$\text{II } a_{11} \cdot x_{12} + a_{12} \cdot x_{22} = 0$$

$$\text{III } a_{21} \cdot x_{11} + a_{22} \cdot x_{21} = 0$$

$$\text{IV } a_{21} \cdot x_{12} + a_{22} \cdot x_{22} = 1$$

4 Gleichungen
mit
4 Unbekannten

Aus I (aufgelöst nach x_{21})

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_{11}$$

und weitere Umformungen und
Substitutionen

liefern

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{21} = -a_{21}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{12} = -a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x_{22} = a_{11}$$

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Damit ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

D werden wir später als

Determinante

bezeichnen! 

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$

Gesucht ist A^{-1}

$$D = 12 \cdot 11 - 20 \cdot 1 = 112$$

$$A^{-1} = \frac{1}{112} \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{112} & -\frac{20}{112} \\ -\frac{1}{112} & \frac{1}{112} \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie: $A \cdot A^{-1} = E$

Rechenregeln

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Anwendungen der Matrizenrechnung

1) Materialbedarfsmatrizen bei Produktionsprozessen

Bp:

Wochenendhäuser

Material

↓

Stahl

Holz

Glas

Arbeits
einheit

Alb

5

6

4

17

Rhön

7

8

5

21

Taunus

6

7

7

15

M :=

Materialbedarfs-
matrix

(3x4)

$$\text{Auftrag } A = \begin{pmatrix} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad (1 \times 3)$$

Frage: Wie berechnet man den Materialbedarf für den Auftrag A?

$$\text{Antwort: } A \cdot M = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 \times 3 & 3 \times 4 & 1 \times 4 \end{matrix}$$

$$A \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 1 \times 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \\ 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \\ 3 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \\ 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix}$$

geg. $P = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$
 (4×1)

Preismatrix
 für je eine Einheit
 Stahl, Holz, Glas
 Arbeit

Frage: Wie hoch sind die Herstellungskosten für ein Haus jeden Typs, wie hoch für den gesamten Auftrag?

Antwort: $M \cdot P = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 17 \\ 7 & 8 & 5 & 21 \\ 6 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix}$
 $(3 \times 4) \quad (4 \times 1)$

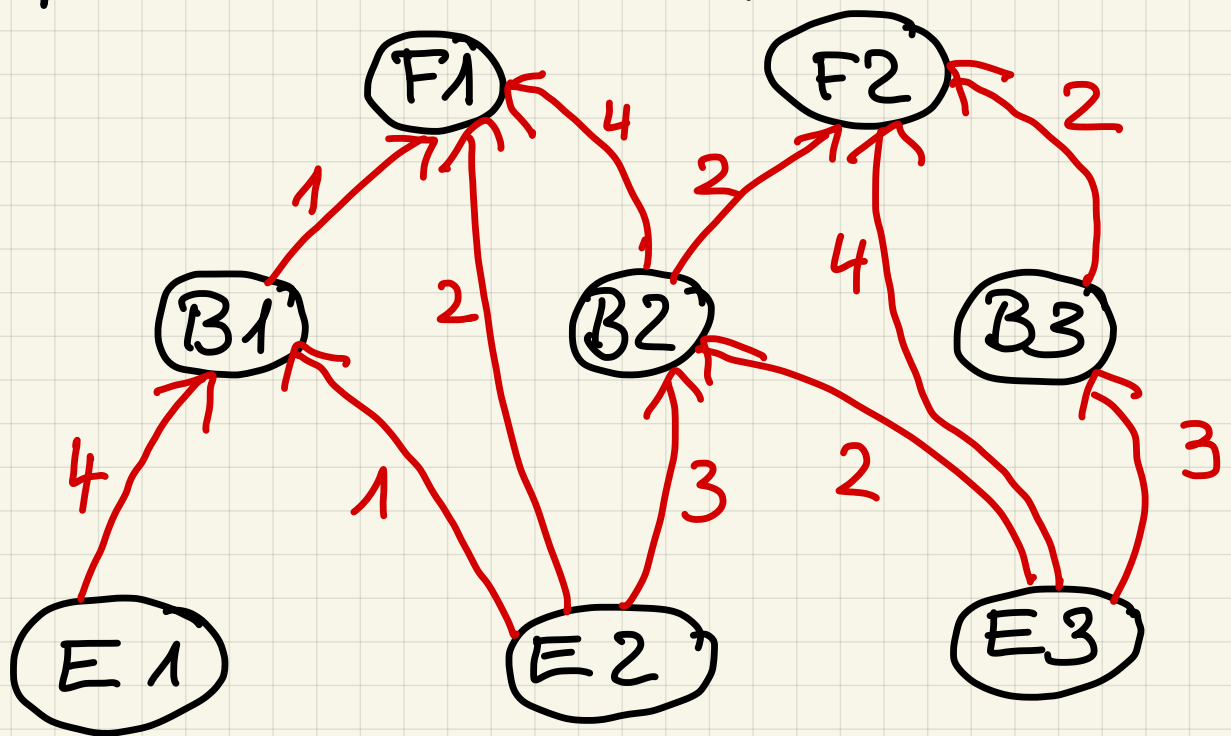
$= \begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix}$ Alb
 Rhön
 Taunus
 (3×1)

Herstellungskosten für den Auftrag:

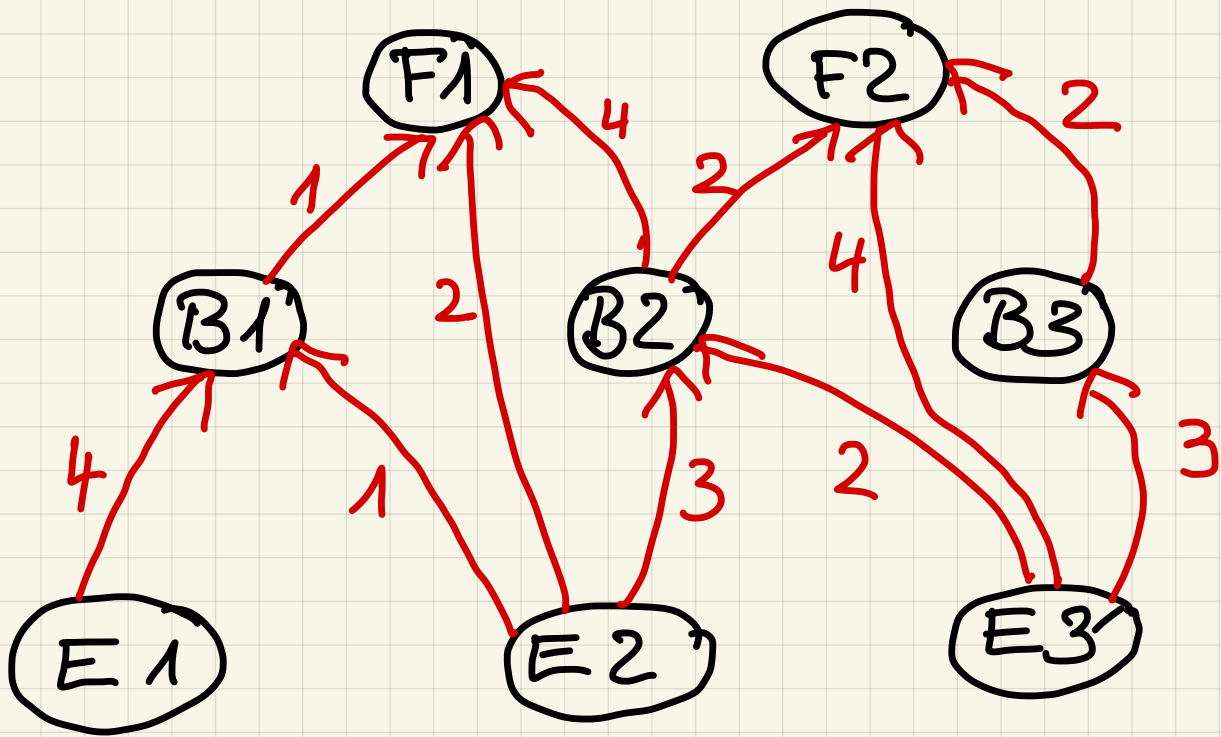
$$\begin{matrix} A & \cdot & (M \cdot P) & = & (A \cdot M) & \cdot & P \\ 1 \times 3 & & 3 \times 1 & & 1 \times 4 & & 4 \times 1 \end{matrix}$$

$$= 17122 \text{ Währungseinheiten} \\ (1 \times 1)$$

2) Technologische Matrix
für Produktionsprozesse



Gozintograph "the part that goes into"



Gozintograph

"the part that goes into"

Teilebedarfsmatrix

aus dem Gozintographen

$$T := \begin{matrix} & \begin{matrix} F1 & F2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F1 \\ F2 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 15 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(8x2)

Die Produktion laufe auf den Maschinen

M1 - M5

$Z:$ =
Zeitbedarfs-
matrix

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc} & & 0,1 & & & 0,2 & 0,5 & \\ & & & 0,2 & & & 0,4 & 0,6 \\ & & & & 0,2 & 0,6 & & 0,1 \\ 0,6 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & & & 0,3 & \\ & 0,7 & & 0,1 & 0,5 & & & 0,1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

(5x8)

Achtung: Es handelt sich hier um ein reines Zahlenbeispiel

Frage: Wie lange ist jede Maschine durch die Fertigung einer Mengeneinheit jedes Endproduktes F1, F2 belegt?

Antwort: $A = Z \cdot T =$
(5x8) (8x2)

$$A = Z \cdot T$$

$$A := \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} F1 & F2 \end{array} \\ \begin{array}{c} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 8.4 & 3 \\ 11.6 & 11.2 \\ 3.2 & 1.8 \\ 6.9 & 2.7 \\ 1.2 & 3.3 \end{array} \right) \end{array}$$

(5 × 2)

Aus A kann man also die Fertigungszeiten für die Produkten eines F1 bzw F2 auf den einzelnen Maschinen ablesen

Es geht nun folgende Bestellung ein:

$$B := \begin{array}{c} F1 \\ F2 \end{array} \left(\begin{array}{c} 100 \\ 50 \end{array} \right)$$

(2 × 1)

Frage: Wie sind die Maschinen für diesen Auftrag belegt?

$$\text{Antwort: } \begin{matrix} A & \cdot & B \\ 5 \times 2 & & 2 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 990 \\ 1720 \\ 410 \\ 825 \\ 285 \end{pmatrix}$$

(5x1)

Z.T. =

Erläuterung der Multiplikation

$$\begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix} \begin{pmatrix} F1 & F2 & B1 & B2 & B3 & E1 & E2 & E3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

(5x8)

$$\begin{matrix} F1 \\ F2 \\ B1 \\ B2 \\ B3 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} \begin{pmatrix} F1 & F2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \\ 15 & 6 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$$

(8x2)

$$= \begin{matrix} M1 \\ M2 \\ M3 \\ M4 \\ M5 \end{matrix} \begin{pmatrix} F1 & F2 \\ 8.4 & 3 \\ & 2.7 \end{pmatrix}$$

Weitere Matrizen:

Netzwerkmatrizen

"Aus Graphen werden Matrizen"

$\Rightarrow$ SS 2024

letztes Kapitel: Graphentheorie

Rang einer Matrix

Def: $\text{rg}(A)$ beschreibt die
Maximalzahl linear
unabhängiger Zeilen bzw.
Spalten

Es gilt: Zeilenrang = Spaltenrang

Zur Erinnerung:

2 Vektoren sind linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur trivial aus diesen Vektoren kombinieren lässt.

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ lin. unabh.

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ geht

Bp: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

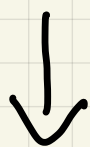
$$\text{rg}(E) = 4$$

Bem: Für den Rang einer
($m \times n$)-Matrix A gilt:
 $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$

Wie bestimmt man den Rang
einer Matrix?

Es gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare
Zeilenumformungen
umzuwandeln
in eine Matrix
von
Zeilenstufen-
form

Elementare Zeilenumformungen:

I: Multiplikation der i -ten Zeile
mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

II: Addition der j -ten Zeile
zur i -ten Zeile

III: Addition der λ -fachen j -ten
Zeile zur i -ten Zeile

IV: Vertauschen der i -ten Zeile
mit der j -ten Zeile

Diese Zeilenumformungen
verändern nicht den Rang
einer Matrix

Bp: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \times 1. \text{Zeile}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} : -16$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

auf Zeilenstufenform bringen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} : -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} : 2$$

- 7 × 1. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 9.5 & 0.5 \end{pmatrix} - 9.5 \times 2. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & -23.25 \end{pmatrix} : -23.25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 3$$