Vorlesung 10.1.2024

Gesucht: $y = \underline{a}x^4 + \underline{b}x^3 + \underline{c}x^2 + \underline{d}x + \underline{e}$

Das Eingangsbeispiel führte auf folgendes GS:

$$\begin{aligned} 16a + 8b + 4c &= -1 \\ 256a + 64b + 16c &= 0 \\ 256a + 48b + 8c &= 0 \end{aligned}$$

[Bem: $e = 4$ und $d = -1$ waren direkte Lösungen]

Def: Lineares Gleichungssystem (LGS)

m Gleichungen, n Variablen

$$\begin{aligned} \underline{a_{11}} x_1 + \underline{a_{12}} x_2 + \dots + \underline{a_{1n}} x_n &= b_1 \\ \underline{a_{21}} x_1 + \underline{a_{22}} x_2 + \quad\quad + \underline{a_{2n}} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ \underline{a_{m1}} x_1 + \underline{a_{m2}} x_2 + \dots + \underline{a_{mn}} x_n &= b_m \end{aligned}$$

Koeffizienten der Gleichung werden als Matrix geschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(m \times n)$-Matrix

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$(n \times 1)$-Matrix $\quad$ $(m \times 1)$-Matrix

Das LGS kann geschrieben werden als:

$$\underset{(m \times n)}{A} \cdot \underset{(n \times 1)}{\vec{x}} = \underset{(m \times 1)}{\vec{b}}$$

Bp: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$

Zugehöriges LGS:
$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 12 \\ -x_1 \qquad\quad + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bp:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 20x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 5x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -20 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Bilden Sie: A, $\vec{x}$, $\vec{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 2 & -5 & -1/2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Das LGS wird nun umgeschrieben als erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Bem: LGS heißt homogen
$\Longleftrightarrow \vec{b} = \vec{0}$

Vorbetrachtungen zu Lösungswegen

1) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b_1$

$n = 1$ 1 Unbekannte

$$a_1 x_1 = b_1$$
$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} \qquad a_1 \neq 0$$

es ex. genau eine Lösung

$n = 2$ 2 Unbekannte, 1 Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b_1$$
$$a_1 x_1 = b_1 - a_2 x_2 \quad | : a_1 \; (a_1 \neq 0)$$
$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \cdot x_2 \quad (*)$$

Es ex. ∞ viele Lösungen

Wähle für $x_2 = t$ $\qquad x_1 = \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} \cdot t$

Ist eine Gerade im $\mathbb{R}^2$

$n = 3$ 1 Gleichung, 3 Unbek.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b_1$$

Nun Vorgabe von 2 Parametern
Lösung ist dann eine Ebene im $\mathbb{R}^3$

$n = 4$ 1 Gleichung, 4 Unbek.

"Hyperebene"

Frage: Was benötigt man für eine eindeutige Lösung, wenn man eine Gleichung mit 2 Unbek. hat?

Man benötigt eine 2. Gleichung, die $\boxed{\text{neue}}$ Informationen liefert

Bp: 2 Brote und 4 Brötchen kosten 5 €

linear abhängig

$$2\,p_{\text{Brote}} + 4\,p_{\text{Brötchen}} = 5$$
$$4\,p_{\text{Brote}} + 8\,p_{\text{Brötchen}} = 10$$

keine neue Information

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \end{array}\right) -2\times\mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

linear unabhängig

$$2\,p_{Br} + 4\,p_{Brö} = 5$$
$$3\,p_{Br} + 10\,p_{Brö} = 8.5$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 8.5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 15 \\ 6 & 20 & 17 \end{array}\right) -\mathrm{I}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 15 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 8.5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 15 \\ 6 & 20 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 15 \\ \hline 0 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$8\, p_{Brö} = 2$$

$$p_{Brö} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$= 0{,}25\,€$$

$$6 \cdot p_{Br} + 12 \cdot 0.25 = 15$$

$$6\, p_{Br} + 3 = 15$$

$$6\, p_{Br} = 12$$

$$p_{Br} = \frac{12}{6} = 2\,€$$

Zusammenfassung

Man benötigt n linear unabhängige Gleichungen, um eine eindeutige Lösung für ein LGS mit n Unbekannten zu erhalten.

Bem: 1) LGS mit m Gleichungen
und n Variablen
heißt exakt bestimmt
$\Leftrightarrow m = n$

LGS besitzt eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ alle Gleichungen sind lin. unabh.

2) $m > n$: LGS überbestimmt
Es ex. Lösungen, wenn $m-n$ Lösungen lin. abh. sind

3) $m < n$: LGS unterbestimmt

Frage: Wie finde ich die lin. abh. Gl. in einem LGS?

Antwort: durch äquivalente Umformungen an der erweiterten Koeffizienten-matrix

Was sind äquivalente Umformungen?
(s. Rangbestimmung einer Matrix)

1) Vertauschen von Zeilen
2) Multiplikation von Zeilen mit einem Skalar
3) Addition oder Subtraktion von Gleichungen (von Vielfachen von Gl)
4) Gl. dürfen linear kombiniert werden

1)-4) ändern die Lösungsmenge des LGS <u>nicht</u>

Der Gauß'sche Lösungsalgorithmus

(Carl Friedrich Gauß
1777 – 1855)

Gauß'sche Eliminationsverfahren

Erläuterung anhand eines Beispiels

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 10 \\
4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Erw. Koeff.matrix

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -2 & 3 & 2 & 10 \\
4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\
1 & 1 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -2 & 3 & 2 & 10 \\
4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\
1 & 1 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\quad \begin{array}{l} \\ :4 \\ \\ \\ \end{array}
$$

1. Iteration : Auswahl einer Zeile und Auswahl einer Spalte : Pivotelement liegt im Kreuzungspkt.

4 Pivotelement

$$
\begin{array}{c}
1' \\ 2' \\ 3' \\ 4'
\end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -2 & 3 & 2 & 10 \\
1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\
3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\
1 & 1 & 4 & 1 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
-2 \times 2' \\ \\ -3 \times 2' \\ -2'
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\
1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\
0 & 5/4 & -1/2 & 15/4 & 5 \\
0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 5/4 & -1/2 & 15/4 & 5 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \cdot \frac{4}{5} \\ \\ \end{array}$$

2. Iteration $\frac{5}{4}$ Pivotelement

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5/2 & 2 & 5/2 & 10 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 3/4 & 7/2 & 5/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\frac{5}{2}\cdot Z3 \\ \\ \\ -\frac{3}{4}\cdot Z3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 19/5 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{19}{5}\cdot Z1 \end{array}$$

3. Iteration 1. Zeile, 3. Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -39 & -78 \end{array}\right) : -39$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ Vertauschen von Zeilen

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1/4 & 1/2 & -1/4 & 0 \\
0 & 1 & -2/5 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 10 & 20 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right)
$$

$$x_4 = 2$$

$$x_3 + 10 \cdot 2 = 20 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 - \frac{2}{5} \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 4 \Rightarrow x_2 + 6 = 4$$

$$\Rightarrow x_2 = -2$$

$$x_1 + 1/4 \cdot (-2) + 1/2 \cdot 0 - 1/4 \cdot 2 = 0$$

$$x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Zusammenfassung:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2$$

Gauß'scher LA

Teilweise Elimination und anschliessende Substitution

jede Zeile wird genau einmal Pivotzeile und jede Spalte wird genau einmal Pivotspalte

Merke: Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn

$$rg(A) = rg(A,b) = m$$

$$\begin{pmatrix} m \text{ Gleichungen} \\ n \text{ Variablen} \end{pmatrix}$$

$$m = n$$

$$16a + 8b + 4c = -1$$
$$256a + 64b + 16c = 0$$
$$256a + 48b + 8c = 0$$

Eingangsbeispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 8 & 4 & -1 \\ 256 & 64 & 16 & 0 \\ 256 & 48 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 16 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1' \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 256 & 128 & 64 & -16 \\ 256 & 64 & 16 & 0 \\ 256 & 48 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -Z\,1' \\ -Z\,1' \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 256 & 128 & 64 & -16 \\ 0 & -64 & -48 & 16 \\ 0 & -80 & -56 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :-8 \\ :-10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ 2' \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 256 & 128 & 64 & -16 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 8 & \frac{56}{10} & -\frac{16}{10} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -Z\,2' \end{array}$$

$$2'\quad\left(\begin{array}{ccc|c} 256 & 128 & 64 & -16 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 8 & \frac{56}{10} & -\frac{16}{10} \end{array}\right)\quad -2\,2'$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 256 & 128 & 64 & -16 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$-\frac{2}{5}\cdot c = \frac{2}{5} \Rightarrow c = -1$$

$$8b + 6\cdot(-1) = -2$$

$$\Rightarrow b = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$256a + 128\cdot\frac{1}{2} + 64\cdot(-1) = -16$$

$$256a = -16$$

$$a = -\frac{16}{256} = -\frac{1}{16}$$

Lösung der Eingangsaufgabe:

$$y = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 4$$

$d=-1, e=4$

Aufstellen der Gleichungen des gezeigten "historischen Aufgabe"

x_1 : Barschaft des 1. Reisenden

x_2 : " " 2. "

x_3 : " " 3. "

$$\text{I} \quad 73 + x_1 + x_2 = 2(x_1 + x_3 + x_2 + x_3)$$

$$\text{II} \quad 73 + x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_3 + x_1 + x_2)$$

$$\text{III} \quad 73 + x_2 + x_3 = 4(x_1 + x_2 + x_1 + x_3)$$

Variablen zusammenfassen und auf eine Seite bringen:

$$\text{I}: \quad x_1 + x_2 + 4x_3 = 73$$

$$\text{II}: \quad 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 73$$

$$\text{III}: \quad 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 73$$

ÜA: Lösen Sie mit dem gauß'schen LA

Lösung:

$x_1 = 0.5$

$x_2 = 6.5$

$x_3 = 16.5$