Vorlesung 17.1.2024

LGS und die Inverse der Koeffizientenmatrix

Bem. Die Inverse A^{-1} ex. nur, wenn A quadratisch und A besitzt den vollen Rang

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \qquad \text{Lin. gs}$$

Falls A quadratisch und A den vollen Rang besitzt, dann ex. eine eindeutige Lösung und kann geschrieben werden als

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^* = \begin{matrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{matrix}$$

Lösungsvektor

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} b_1^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{matrix}$$

Äquivalente Umformungen transformieren A nach E und das Absolutglied in den Lösungsvektor

A^{-1} sei bekannt

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

Also $E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} \cdot \vec{b} = \vec{b}^*}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

j-te Spalte von E

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \underbrace{A^{-1} \cdot \vec{e}_j}_{\text{j-te Spalte der Inversen}}$$

Die Lösung eines LGS mit dem Einheitsvektor $\vec{e_j}$ als Absolutglied ist die j-te Spalte der Inversen A^{-1}

Um alle Spalten zu berechnen, löst man $A \cdot \vec{x} = \vec{e_j}$ $j = 1, \dots, m$ simultan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$E \qquad\qquad\qquad A^{-1}$$

Bp: geg A

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{}^{A} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.Z : 2

3.Z − 2x 1.Z

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.Z. + 3x 2.Z.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.Z − 3.Z

2.Z − 1/2 3.Z

3.Z · 2

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.Z − 2 · 3.Z.

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Fazit:</u> Ein LGS mit n Gleichungen und n Unbekannten besitzt eine eindeutige Lösung

$\iff \operatorname{rg}(A) = n$

A regulär

A besitzt eine Inverse

Erläuterung zu Inverse des Koeffizienten-matrix

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$E \cdot \vec{x} = \vec{b}^*$$

Aus A 5.14: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -8 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$ mit $\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{matrix}}_{A}$ und $\underbrace{\begin{matrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{matrix}}_{\vec{b}}$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Berechnung von A^{-1}: $A \to E$, $E \to A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Die Lösung eines LGS erhält man durch Multiplikation von links der Inversen an den Vektor $\vec{b}$

$$\vec{b}^{*} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

hier:
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 11 \end{pmatrix}$$

Determinanten

Suche von A^{-1} (A (2x2) Matrix) führte auf einen Ausdruck, der "ausgeklammert" werden konnte

$$D = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

D ist eine Kennzahl, die sich aus allen Koeffizienten einer Matrix berechnen lässt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ & & \ddots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$A = (a_{11})$ $\quad \det A = a_{11}$ 1 Summand

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2 Summanden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31}$$

6 Summanden

$$- a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regel zur Berechnung 3-reihiger Determinanten : Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + \; - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Produkt der Hauptdiagonalen +

→ Produkt der Nebendiagonalen

Die Regel von Sarrus gilt nur für 3-reihige Determinanten!

Übung: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}$

Ergebnis: -83

Die Anzahl der Summanden bei der Bildung der Determinante hängt von der Dimension der Matrix ab bei $(n \times n)$ beträgt sie $n!$

Einschub: Permutationen

		Anordnungsmöglichkeit	
Bp:	1 Element	1	$1!$
	2 Elemente	2	$2!$
	3 Elemente	6	$3!$
	4 Elemente	24	$4!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Def: A sei $(m \times m)$ Matrix

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{P(j)} (-1)^{I(j)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{mj_m}$$

$P(j)$: Permutationen des 2. Index

$I(j)$: Zahl der Inversionen (= Umstellungen)

Achtung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ a_{21} & & a_{24} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & & a_{44} \end{vmatrix}$$

Regel von Sarrus
hier nicht anzuwenden

Man braucht
24 Summanden
mit jeweils
4 Faktoren

Hilfsmittel zur Berechnung
höherer Determinanten:

Eigenschaften von Determinanten

1) Vertauschen zweier benachbarter Zeilen ändert das Vorzeichen

$$\det A_{P(i)} = (-1)^{I(i)} \det A$$

2) $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^m \cdot \det A$

Bp: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot \lambda a_{22} - \lambda a_{12} \cdot \lambda a_{21}$$

$$= \lambda^2 a_{11} a_{22} - \lambda^2 a_{12} a_{21}$$

$$= \lambda^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

3) Addition zweier Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4) Die Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile ändert den Wert der Determinante nicht.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}(a_{22}+\lambda a_{12}) - a_{12}(a_{21}+\lambda a_{11})$$

$$= \underline{a_{11}a_{22}} + \cancel{\lambda a_{11}a_{12}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$
$$- \cancel{\lambda a_{11} a_{12}}$$

Frage:

Warum ist $\det A = 0$, falls Zeilen in der Matrix A linear abhängig sind?

linear abhängige Zeilen "kürzen" sich raus, eine Zeile wird dann zu einer "Nullzeile", d. h. in jedem Summanden bei der Berechnung ist ein Faktor 0.

Methoden, höherreihige Determinanten zu berechnen

Grundlagen

1) Adjunkte und Adjungierten Matrix

Def: Die Unterdeterminante $(m-1)$-ter Ordnung zum Element a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$|A|_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i+1\,1} & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdot & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}$$

heißt MINOR

Frage: Wie viele Minoren besitzt eine Determinante n-ter Ordnung?

Antwort: n^2

Bp: Berechnen Sie alle Minoren von $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$|A|_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A|_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

etc.

9 Minoren

$|A|_{11} = 2 \quad |A|_{12} = 3 \quad |A|_{13} = 1$

$|A|_{21} = -1 \quad |A|_{22} = 2 \quad |A_{23}| = 3$

$|A|_{31} = -6 \quad |A|_{32} = 5 \quad |A|_{33} = 18$

Def: Die Adjunkte zum Element a_{ij}

$$A_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{Vorzeichenmuster}} |A|_{ij}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & & & \\ + & & & & \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

A_{ad} adjungierte Matrix

A_{ad} fasst alle Adjunkten zu einer Matrix zusammen und zwar wird die Transponierte davon genommen.

Der Entwicklungssatz von Laplace

Eine Determinante $|A|$ m-ter Ordnung kann entweder nach einer Zeile oder nach einer Spalte "entwickelt" werden

a) Entwicklung nach der Zeile i

$$\det A = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} =$$

$$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

b) Entwicklung nach der Spalte j

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot A_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} a_{ij} |A|_{ij}$$

Schrittweise Reduzierung der Ordnung der Determinante

Bp: $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} & \overset{+}{0} \\ \overset{-}{4} & \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{-2} & \overset{-}{3} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$

Entwickeln nach 1. Zeile

$$\det A = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 2 + 0 = 12$$

Entwickeln nach 3. Spalte:

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1 \cdot 4 + 8 = 12$$

Bp

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Entw. nach 2. Zeile

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entw. nach 4. Spalte

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Entw. nach 1. Zeile

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1$$

$$\det A = -2$$

Merke:

Vor Anwendung des Entw.satzes von Laplace sollten zur Vereinfachung noch Umformungen vorgenommen werden, z.B. auf Dreiecksform bringen (= Triangulieren)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Entw.} \\ \text{1. Spalte}}}{=} \quad =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det A = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1)$$

$$= 2$$

2 benachb. Zeilen werden vertauscht, also $\cdot (-1)$