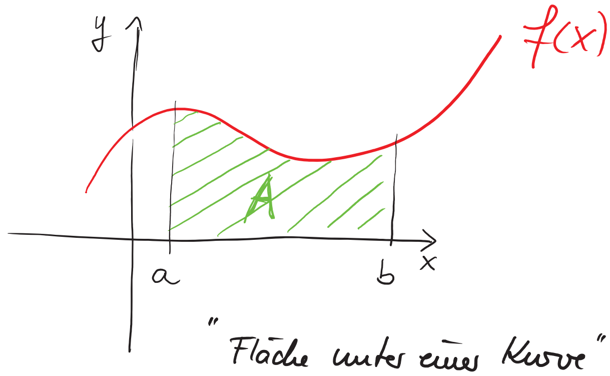
Vorlesung Mathematik 1 24.1.24

Integralrechnung

1) Zur Flächenberechnung

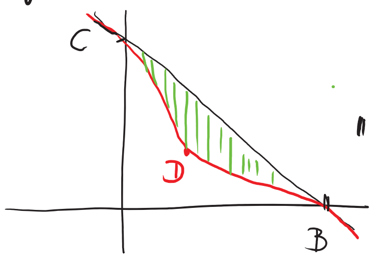


"Fläche unter einer Kurve"

Ausblick: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$F'(x) = f(x)$

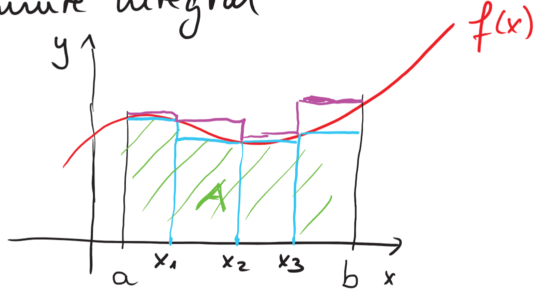
Eingangsbeispiel zur LA:



"Fläche zwischen zwei Kurven"

2) Umkehrung zur Differentiation : Ableiten und Aufleiten

Das bestimmte Integral



$f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$

Einteilung in Rechtecke von unten und von oben

↓ Untersumme ↓ Obersumme

Untersumme U_4: $(x_1-a)\cdot f(x_1) + (x_2-x_1)\cdot f(x_2) + (x_3-x_2)\cdot f(x_2) + (b-x_3)\cdot f(x_3)$

Obersumme O_4 : $(x_1-a)\cdot f(a) + (x_2-x_1)\cdot f(x_1) + (x_3-x_2)\cdot f(x_3) + (b-x_3)\cdot f(b)$

Die gesuchte Fläche liegt zwischen O_4 und U_4

Mit zunehmender "Verfeinerung" wird die Differenz zwischen O und U immer kleiner

Def: Das bestimmte Integral

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k$$

$n\to\infty$ $n\to\infty$ $n\to\infty$ $k=1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$ heißt (falls vorhanden) das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

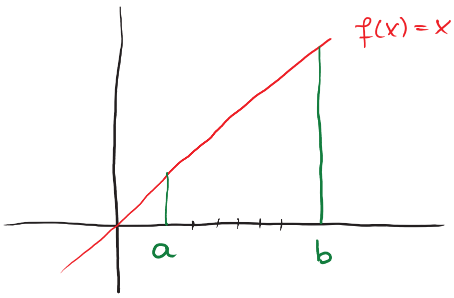
$\int$ erinnert an Summe

x Integrationsvariable

f(x) Integrand

a untere
b obere } Integrationsgrenze

Bp: $f(x) = x$



Gesucht: $\int_a^b f(x)\,dx$

$= \int_a^b x \cdot dx$

Gedanken: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

Integral: $F(b) - F(a)$

$= \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$

$= \frac{b^2-a^2}{2}$

Grenzwertberechnung: Unterteilung von $[a,b]$ in n Teilintervalle mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Zerlegungspunkte: $x_k = a + k\cdot\Delta x$ * $k = 0,1,2,\ldots n$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot\Delta x$$

$\downarrow$ $f(x) = x$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\underbrace{a + (k-1)\cdot\Delta x}_{x_{k-1}\ (*)}]\cdot\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a\cdot\Delta x + (k-1)\cdot\Delta x^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a\cdot\Delta x + \sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot\Delta x^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left((n\cdot a\cdot\Delta x) + \Delta x^2\cdot\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\cdot\Delta x + \Delta x^2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} k\right)$$

Verschieben des Summationsindex

Summe der ersten (n−1) natürlichen Zahlen

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x\left(n\cdot a + \Delta x\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)\right)$$

da $\Delta x = b-a$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\Delta x \left(n \cdot a + \Delta x \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{n} \left(n \cdot a + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \right) \quad \text{da } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left((b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n} \right) \right) \qquad \text{NB: } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) = 1$$

$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2} \right) = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int_a^b x \cdot dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Anmerkung: Nur "einfache" Funktionen wie $f(x) = x$ lassen sich über den Grenzwert berechnen.

Grundregeln für das bestimmte Integral

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ Festlegung

2) $\int_a^b = -\int_b^a f(x)\,dx$ Umkehrung des Integrationsweges bedeutet VZW

3) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

4) $\int_a^b \left(c \cdot f(x) + d \cdot g(x)\right) dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx + d \cdot \int_a^b g(x)\,dx$

"Linearität"

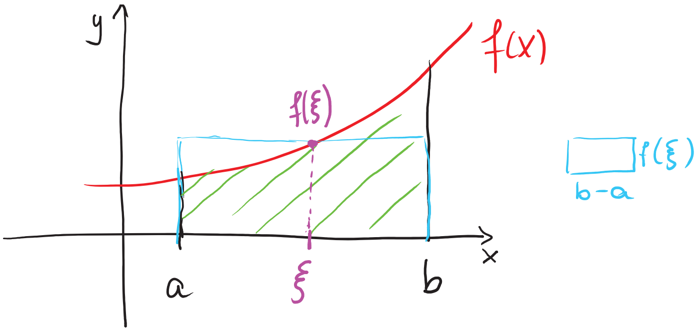
Sätze über integrierbare Funktionen

1) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Fkt. ist dort integrierbar
2) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall monotone Funktion ist dort integrierbar
3) Jede auf einem abgeschossenen Intervall beschränkte und an höchstens endlich vielen Stellen unstetige Fkt. ist dort integrierbar.
4) Mittelwertsatz der Integralrechnung

f sei stetig auf $[a,b]$

Beh: Es ex. mindestens ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(\xi)$

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ heißt der Mittelwert der Funktion auf $[a,b]$



Veranschaulichung

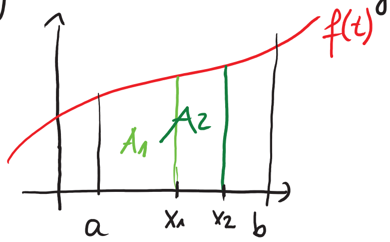
Das unbestimmte Integral

Integration als Umkehrung der Differentiation

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(F(x)+C)' = f(x)$$

Erklärung des Zusammenhangs zw. unbest. und best. Integral



$$\int_a^b f(t)\,dt$$

$$A_1 = \int_a^{x_1} f(t)\,dt \qquad A_2 = \int_a^{x_2} f(t)\,dt$$

Flächeninhalt als Funktion der oberen Integrationsgrenze

Def: $I : x \longmapsto I(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in [a,b]$

I heißt Integralfunktion

Bem: $I_1 : x \longmapsto \int_{c_1}^x f(t)\,dt \qquad I_2 : x \longmapsto \int_{c_2}^x f(t)\,dt$

$$I_1 - I_2 = \int_{c_1}^x f(t)\,dt - \int_{c_2}^x f(t)\,dt = \int_{c_1}^x f(t)\,dt + \int_x^{c_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$$

Konstante

Herleitung des Hauptsatzes:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$x \longrightarrow x + \Delta x$

$\Rightarrow \Delta I = I(x+\Delta x) - I(x)$

$f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \qquad f(x)\cdot\Delta x$

Es gilt: $f(x)\cdot\Delta x \le \Delta I \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | : \Delta x$

$$f(x) \le \frac{\Delta I}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

da $\Delta x \to 0$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x} \le \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

$$f(x) \le I'(x) \le f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) = I'(x)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion zu f

und es gilt: $I'(x) = f(x)$

Differenzieren und Integrieren sind inverse Rechenoperationen!

Folgerung: $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$

Aus $\int_a^a f(t)\,dt = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$

$I(x) = F(x) - F(a)$

mit $x=b$: $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

Schema:

1) Aufsuchen einer Stammfunktion $F(x)$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b$

Wie findet man Stammfunktionen?

Aus der Kenntnis von Ableitungen

Bp: 1) $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \; C \in \mathbb{R}, \; n \neq -1$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

4) $\int e^x\,dx = e^x + C$

5) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

Grundintegrale
viele weitere in sog. Integraltabellen in Formelsammlungen

Integrationsregeln

1) Summenregel

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bp: $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2$ $\quad F(x) = \frac{x^{5+1}}{6} + 3 \cdot \frac{x^{3+1}}{4} + \frac{x^{2+1}}{3}$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Produktintegration – partielle Integration

Integrand liegt in Form eines Produktes vor

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \cdot g'(x) = (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x)$$

Integration auf beiden Seiten

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot g(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx}$$

Seiten

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx}$$

Bp: 1) $\int x\cdot e^x\,dx$ $f(x) = x$ $f'(x) = 1$
$g'(x) = e^x$ $g(x) = e^x$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx$$
$$= x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x = e^x(x-1) + C \quad {*}$$
$C\in\mathbb{R}$

2) $\int x^2\cdot e^x\,dx$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$
$g'(x) = e^x$ $g(x) = e^x$

$$= x^2\cdot e^x - \int 2x\cdot e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int x\cdot e^x dx$$

erneute partielle Integration
bzw. Ergebnis aus 1) verwenden

$$= x^2\cdot e^x - 2\left(e^x(x-1)\right)^{*} = x^2\cdot e^x - 2(x-1)\cdot e^x + C$$
$C\in\mathbb{R}$

3) $\int x\cdot \sin x\,dx$ $f(x) = x$ $g'(x) = \sin x$
$f'(x) = 1$ $g(x) = -\cos x$

$$\int x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx$$
$$= -x\cdot\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cdot\cos x + \sin x + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

für zu Hause:

- $\int(\sin x\cdot\cos x)\,dx$
- $\int \ln x\,dx$