

Übungsblatt 3 Funktionen

Zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben sollten Sie auch die Inhalte aus dem Kapitel „VORKURSWISSEN: Funktionen“ durchgearbeitet haben bzw. beherrschen!

Aufgabe 3.0 Definitionsbereiche

Geben Sie für die nachfolgenden Funktionen die maximalen Definitionsbereiche in \mathbf{R} an!

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

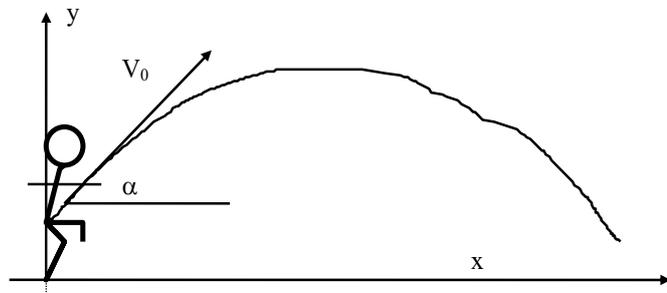
(b) $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1} + \frac{\sqrt{2-4x}}{\sqrt{2+4x}}$,

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$,

(d) $f(x) = \sqrt{x^4-3x^3}$

Aufgabe 3.1 Weitspringer

Ein Weitspringer springt unter einem Absprungwinkel α und einer Absprunggeschwindigkeit v_0 ab. Seine Flugbahn kann bei vernachlässigter Reibung durch $(x(t), y(t))$ beschrieben werden mit:



$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha,$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

Man bestimme **Flugdauer T** und **Flugweite W**. Für welchen Winkel α werden Flugdauer bzw. Flugweite maximal? Mit welcher Geschwindigkeit muß ein Springer unter irdischen Bedingungen ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) abspringen, um bei einem Absprungwinkel von 45° eine Weite von 9m zu erreichen?

Aufgabe 3.2

-

Aufgabe 3.3

-

Aufgabe 3.4 Grenzwerte von Funktionen

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die gesuchten Grenzwerte

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ für $f(x) = \frac{6x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ für $g(x) = \frac{(1 - \cos(2x))e^{x+2}}{2 \sin^2(x)e^{x+3}}$

Hinweis: $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Bereiten Sie die Aufgaben für den 05./06.12.23 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 3.5 Grenzwerte von Funktionen 2

Bestimmen Sie über den Satz aus der Vorlesung

Satz S4-1: f hat bei x_0 Grenzwert $g \Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n) \rightarrow x_0$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

ob die nachfolgenden Grenzwerte existieren und wenn ja, was der Wert für g ist:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x}{5x^2 + 3}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 + 27}{x^2 - 9} \right)$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x)$

[Zusatzfrage: Wieso steht bei (c) im Limes 0^+ und nicht einfach 0 ?]

Aufgabe 3.6 Grenzwerte von Funktionen 3

Bestimmen Sie den Grenzwert (oder begründen Sie, warum er nicht existiert):

(a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 5x + 1}{x - 5}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ (d) $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \epsilon)^4 - x^4}{\epsilon}$

Aufgabe 3.7

-

Aufgabe 3.8 Landausche O-Notation

A_n, B_n, \dots seien die Laufzeiten verschiedener Algorithmen.

- a) Ordnen Sie jeder der Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" $O(B)$ zu.
- b) Entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus, erster oder zweiter, ist jeweils für große n schneller?

Bestimmen Sie auch zum Vergleich das jeweils 1. Glied jeder Folge.

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 + 5$
Fall 2	$C_n = \frac{100n^2 + 650n + 40}{2n + 50}$	$D_n = \frac{(n + 1)! n}{(n - 1)! (n + 1)^2}$
Fall 3	$E_n = 10n + 10^{-3}n^4$	$F_n = 10n + 2000n^2$

Hinweis zu b): Bilden Sie jeweils „Erster / Zweiter“