

Rezepte Mathematik 1 + 2

Nachfolgend eine Kurzfassung von Rechenrezepten für die Lösung von Standardaufgaben der Mathematik 1 und 2.

Die Rezepte sind kurz und knapp und setzen das Verständnis der jeweiligen Stoffkapitel voraus. Fallweise die angegebenen Querverweise auf Kapitel im Skript nacharbeiten!

Die Rezeptsammlung ist keinesfalls vollständig!! Eine Haftung für die Richtigkeit wird auch nicht übernommen, wenngleich ich mich um richtige Darstellung bestens bemühe!

/WK/ 03.02.2009

Inhalt:

Rezepte Mathematik 1 + 2.....	1
15.1. Lösen von (Un-)Gleichungen	2
15.1.1. Betragsgleichungen.....	2
15.1.2. Nullstellen finden	2
15.1.3. log- und exp-Gleichungen	2
15.1.4. Wurzelgleichungen.....	2
15.1.5. Ungleichungen	2
15.2. Grenzwerte ermitteln.....	3
15.3. Taylor-Entwicklung.....	3
15.4. Matrizen multiplizieren	4
15.5. Extremwerte, lokal und global	5
15.5.1. 1 Veränderliche (gehört noch zu Mathe 1).....	5
15.5.2. 2 Veränderliche	5
15.6. Lagrange-Methode (Extrema mit Nebenbed.)	6
15.7. Normalverteilte Zufallsvariable	6
15.7.1. Von Binomial zu Normal	7
15.7.2. Aufgabentyp 1: Wahrscheinlichkeit gefragt.....	7
15.7.3. Aufgabentyp 2: b (Schwellwert), σ oder μ gefragt.....	7
15.8. Rechnen mit komplexen Zahlen	8
15.8.1. Umrechnung Polarform \rightarrow kartesische Form	8
15.8.2. Umrechnung kartesische Form \rightarrow Polarform.....	8
15.8.3. Potenzen komplexer Zahlen.....	8
15.8.4. Dividieren durch komplexe Zahlen	9
15.9. Fourierreihen	9

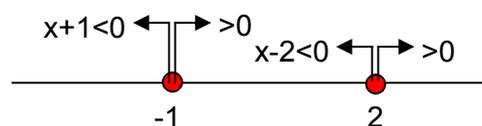
Rezepte für Mathematik 1 (Wintersemester)

15.1. Lösen von (Un-)Gleichungen

15.1.1. Betragsgleichungen

Wie löst man z.B. $|x + 1| = 2|x - 2|$?

1. Umschlagspunkte für alle N Beträge bestimmen
2. Skizze machen
3. N+1 Fallunterscheidungen: jeweils Gleichung lösen
4. Probe: Paßt Lösung in Bereich?



15.1.2. Nullstellen finden

Wie löst man $f(x) = 0$?

1. Prüfen, ob sich $f(x)$ als Produkt von (2 oder mehr) Faktoren schreiben läßt.
2. Wenn ja: $f(x)$ ist 0, sobald einer der Faktoren 0 ist. (Die Lösungsmenge ist die Vereinigungsmenge der Nullstellen der Faktoren.)

15.1.3. log- und exp-Gleichungen

Wie löst man z.B. $\ln(x) + \ln(x + 2) = 0$?

1. Möglichst alle Terme mit log und Variable x (bzw. exp und Variable x) zus.fassen
2. auf beiden Seiten "e hoch" (bzw. "log") (ist Äquivalenzumformung)
3. Probe, ob Lösung(en) im Def. bereich

15.1.4. Wurzelgleichungen

Wie löst man z.B. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{4 - 4x} - 1 = 0$?

1. Mindestens eine Wurzel isolieren
2. Quadrieren (ACHTUNG: ist " \Rightarrow "-Umformung)
3. Falls noch Wurzel übrig: Weiter bei 1.
4. Probe: Erfüllt jede Lösung die Ausgangsgleichung?

15.1.5. Ungleichungen

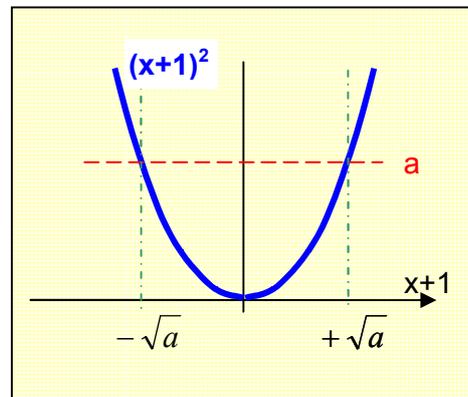
Wie löst man z.B. $\frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} \leq 5$?

1. Bei jedem Durchmultiplizieren mit unbestimmtem Term $T(x)$: Fallunterscheidung $T(x) < 0$ und $T(x) > 0$ liefert 2 Einzel-Ungleichungen.
2. Jede Einzel-Ungleichung lösen
3. Probe, ob Einzel-Lösungsmenge (Bereich) mit dem Bereich der Fallunterscheidung zusammenpaßt (d.h. die Schnittmenge beider Bereiche bilden)

Wie löst man eine quadratische Ungleichung, z.B. $x^2 + 2x > 4$?

Wir erzeugen links wir durch **quadratische Ergänzung** ein vollständiges Quadrat, hier: $(x+1)^2 > 5$. Allgemein hat man 4 Fälle zu unterscheiden, wobei $a \geq 0$ eine beliebige nicht-negative reelle Konstante sei:

1. Gilt $(x+1)^2 \geq -a$, so ist jedes $x \in \mathbf{R}$ eine Lösung.
2. Gilt $(x+1)^2 < -a$, so gibt es keine Lösung in $x \in \mathbf{R}$.
3. Gilt $(x+1)^2 > +a$, so bedeutet dies (s. Bild)
 $(x+1) < -\sqrt{a} \quad \vee \quad \sqrt{a} < (x+1)$, d.h. $(x+1)$
 liegt in der Menge $]-\infty, -\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a}, +\infty[$.
4. Gilt $(x+1)^2 \leq +a$, so liegt $(x+1)$ innerhalb des Intervalls $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$.



Im obigen Beispiel ist $a=5$, also liegt Fall 3. vor.

15.2. Grenzwerte ermitteln

Hier gibt es nicht ein Standardverfahren, sondern verschiedene Ansätze, die man kreativ ausprobieren muss:

- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty}$ und gebrochen rationale Funktion in n : Durch **größte n-Potenz im Nenner (gPiN)** dividieren, dann Grenzübergang für jeden einzelnen Term in Zähler und Nenner. (Satz S3-4 und S3-5)
- Bei sonstiger unbestimmter Situation " ∞ / ∞ " schauen, ob man einen gemeinsamen Faktor (z.B. \sqrt{n}) im Zähler und Nenner ausklammern kann.
- Bei unbestimmter Situation " $\infty - \infty$ " schauen, ob man durch geeignete Umformungen (Hauptnenner, Binomische Formel, ...) auf entscheidbare Situation kommt (Kap. 3)
- Wenn $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$: prüfen, ob die Voraussetzungen des Satzes Satz S5-10, Regeln von

L'Hospital (" $0/0$ -Situation" oder " ∞/∞ -Situation") vorliegen. Wenn ja, dann $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ betrachten.

- Evtl. L'Hospital wiederholt anwenden.
- Für uneigentliche Grenzwerte: von "links" und von "rechts" betrachten, z.B.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"0+"}} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"0-"}} = -\infty$$

15.3. Taylor-Entwicklung

Gesucht: Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_0 bis zur $n=3$. Ordnung.

1. Man bilde $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.

2. Tabelle bauen (bis $n+1 = 4$):

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$f(x)$	$f(x_0) = t_0$
...
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0) = t_n$
$n+1$	$f^{(n+1)}(x)$	

(In der letzten Spalte stehen nur Zahlen oder Terme, die wir mit t_n abkürzen)

3. Taylorformel aufschreiben:

$$f(x) = t_0 + t_1 \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \dots + t_n \frac{(x-x_0)^n}{n!} + f^{(n+1)}(u) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Der letzte Term ist das Restglied, in diesem ist u irgendeine Zahl zwischen x und x_0 .

Wenn zusätzlich nach einer Fehlerabschätzung gefragt ist, z.B.: "Welchen Fehler macht man maximal, wenn man bei $x=6$ statt $f(x)$ das Taylorpolynom n . Ordnung um $x_0=5$ benutzt?"

- Eine obere Schranke der Funktion $r(u) = |f^{(n+1)}(u)|$ in $[5,6]$ bestimmen [entweder das globale Maximum mit Rezept 15.5.1 (Ränder beachten!) oder eine gröbere Abschätzung für dieses Maximum] \rightarrow Ergebnis C .
- Der maximale Fehler ist dann $\frac{C}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1}$ (Satz S5-9)

15.4. Matrizen multiplizieren

Gesucht: $C = A B$.

Geht nur, wenn Spaltenzahl A = Zeilenzahl B .

Man schreibt A links und B oberhalb der Zielmatrix C , z.B.:

		b_{11}	b_{12}	b_{13}
		b_{21}	b_{22}	b_{23}
a_{11}	a_{12}	c_{11}	c_{12}	c_{13}
a_{21}	a_{22}	c_{21}	c_{22}	c_{23}

Es gilt dann für Zielelement c_{ik} = "i-te Zeile von A " mal "k-te Spalte von B ", wobei die entsprechenden Einzelemente multipliziert und die Produkte summiert werden, also z.B.

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}.$$

Rezepte für Mathematik 2 (Sommersemester)

15.5. Extremwerte, lokal und global

15.5.1. 1 Veränderliche (gehört noch zu Mathe 1)

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion $f(x)$ in $[a,b]$?

0. Wenn f **monoton** ist, dann liegen die Extrema an den Rändern, fertig! – Sonst:
 1. Man bilde $f'(x)$ und $f''(x)$.
 2. Lösungen x_i von $f'(x) = 0$ sind Kandidaten für lokale Extrema.
 3. Tabelle bauen:

x	f(x)	f'(x)	
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	Wenn $f''(x_i) > 0$: lokales Minimum
... < 0 : lokales Maximum
x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$... $= 0$ <u>und</u> $f'''(x_i) \neq 0$: Sattelpunkt (Wenn $f'''(x_i) = 0$: Sonderfall nach Satz S5-13)

Falls globale Extrema gefragt sind: Wenn die Funktion nur 1 relatives Extremum hat, kann dies an den Rändern nicht übertroffen werden, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

a	f(a)		Ränder nicht vergessen!
b	f(b)		

[Falls $a = -\infty$ oder $b = \infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty}$ benutzen]

5. Das globale Maximum ergibt sich aus dem Maximum von $\{f(a), f(b), f(x_i) \mid x_i \text{ ist lokales Maximum}\}$. Analog für globales Minimum.

15.5.2. 2 Veränderliche

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion $F(x,y)$ in $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$?

1. Man bilde die partiellen Ableitungen $F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}$.
2. Lösungen (x_i, y_i) von $F_x(x_i, y_i) = 0 \wedge F_y(x_i, y_i) = 0$ sind Kandidaten für lokale Extrema.
3. Tabelle bauen ($\Delta = F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2$):

x	y	F(x,y)	$\Delta(x,y)$	$F_{xx}(x,y)$	
x_1	y_1	$F(x_1, y_1)$	$\Delta(x_1, y_1)$	$F_{xx}(x_1, y_1)$	Wenn $\Delta > 0 \wedge F_{xx} > 0$: lokales Minimum
...	Wenn $\Delta > 0 \wedge F_{xx} < 0$: lokales Maximum
x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	$\Delta(x_n, y_n)$	$F_{xx}(x_n, y_n)$	Wenn $\Delta < 0$: kein Extremum; $= 0$: unentscheidb.

Falls globale Extrema gefragt sind: Gelten die Bedingungen an Δ und F_{xx} **für alle** $(x,y) \in D$ (Satz S 8-5), dann ist's ein globales Extremum, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

x	y	F(x,y)			
a_1	a_2	$F(a_1, a_2)$			Eckpunkte nicht vergessen!
a_1	b_2	$F(a_1, b_2)$			
b_1	a_2	$F(b_1, a_2)$			

b_1	b_2	$F(b_1, b_2)$			
-------	-------	---------------	--	--	--

[Falls $a_1, a_2, b_1, b_2 = \pm \infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty}$ benutzen]

5. Ränder: Man bestimme alle lokalen Extrema der 4 Funktionen $F(x, a_2)$, $F(x, b_2)$, $F(a_1, y)$, $F(b_1, y)$ (für jede Funktion Rezept 15.5.1, Schritt 1.-3., durchführen).

[Falls z.B. $a_1 = -\infty$, dann $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ benutzen. Ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = -\infty$, braucht man

$F(a_1, y)$ nicht weiter untersuchen (dort kann kein Maximum liegen!). Ebenso nicht die Eckpunkte $F(a_1, a_2)$ u. $F(a_1, b_2)$.]

6. Das globale Maximum ergibt sich aus dem Maximum der lokalen Extrema im Innern, der lokalen Extrema an den Rändern und der Eckpunkte. Analog für globales Minimum.

15.6. Lagrange-Methode (Extrema mit Nebenbed.)

Gegeben sei eine zu maximierende Funktion $g(x, y) = \text{Max}$ und eine Nebenbedingung $r(x, y) = c$.

- Umformen der Nebenbedingung auf $s(x, y) = r(x, y) - c = 0$.
- Hilfsfunktion $F(x, y, \lambda) = g(x, y) + \lambda s(x, y)$.
- Gleichungssystem bilden: $F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad \wedge \quad F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad \wedge \quad s(x, y) = 0$.
- λ eliminieren
- Lösungen für x und y bestimmen.

Bei mehreren Lösungen: Durch Einsetzen in $g(x, y)$ sieht man, welche Lösung Minimum und welche Maximum sein kann. Den Nachweis, dass es Minima / Maxima sind, braucht man in der Regel nicht zu führen.

15.7. Normalverteilte Zufallsvariable

Alle "Regeln Nr." beziehen sich auf Satz S10-12.

Satz S10-12 Regeln für Normalverteilungen

- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
- Ist X eine $N(\mu, \sigma)$ -verteilte Zufallsvariable, so ist $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ $N(0, 1)$ -verteilt.
- Für die Verteilungsfunktion $F(b) = P(X \leq b)$ gilt: $F(b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(a < X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$
- $q = \Phi(z_q) \Leftrightarrow 1 - q = \Phi(-z_q)$
- Ist z_q das q -Quantil einer $N(0, 1)$ -Verteilung, so ist $x_q = \sigma \cdot z_q + \mu$ das q -Quantil einer $N(\mu, \sigma)$ -Verteilung.

15.7.1. Von Binomial zu Normal

Binomialverteilung \cong Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen, p : Anteil weißer Kugeln.

Wie wahrscheinlich ist $P(X \leq b)$, d.h. unter den gezogenen Kugeln sind bis zu b weiße?

1. Voraussetzung prüfen: Gilt $np > 5$ und $n(1-p) > 5$? (Satz S10-14, Moivre-Laplace)
2. Wenn ja, dann ist X näherungsweise $N(\mu, \sigma)$ -verteilt: Berechne
 $\mu = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ nach Satz S10-10.
3. Weiter mit Rezept 15.7.2.

15.7.2. Aufgabentyp 1: Wahrscheinlichkeit gefragt

Sei X $N(\mu, \sigma)$ -verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gilt $P(X \leq b)$?

1. Nach Regel Nr. 3 gilt $P(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$
2. Falls $z < 0$, dann $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ benutzen (Regel Nr. 1).
3. Φ -Wert aus Tabelle ablesen.

Falls nach $P(a < X \leq b)$ gefragt ist, dies auf $P(X \leq b) - P(X \leq a)$ ("obere Grenze – untere Grenze") umformen und analog verfahren.

Falls nach $P(X > b)$ gefragt ist: Umformen auf $P(X > b) = 1 - P(X \leq b)$.

15.7.3. Aufgabentyp 2: b (Schwellwert), σ oder μ gefragt

z.B.: Sei X $N(\mu, \sigma)$ -verteilt und sei q bekannt. Für welches b gilt $P(X \leq b) = q$?

1. q -Quantil z_q der $N(0, 1)$ -Verteilung aus Tabelle bestimmen: a. " nächster Nachbar ": Welcher Wert $\Phi(z_q)$ ist am nächsten bei q ? Falls $q < 0.5$: Regel Nr. 5 benutzen: $1 - q = \Phi(-z_q)$.
2. $b = x_q = \sigma \cdot z_q + \mu$ nach Regel Nr. 6

Varianten:

1. Falls nach $P(X > b) = q'$ gefragt ist: Umformen auf $P(X \leq b) = 1 - q' = q$.
2. Falls bei bekanntem b nach σ oder μ gefragt ist: Die Gleichung in 2. entsprechend nach σ oder μ auflösen: $\sigma = \frac{b - \mu}{z_q}$, $\mu = b - \sigma z_q$

Verbesserte Version zu "**nächster Nachbar**" in Schritt 1 ist "**lineare Interpolation**"

- a. aus Tabelle die konsekutiven Werte z_1 und z_2 ablesen mit $\Phi(z_1) \leq q' \leq \Phi(z_2)$
- b. z_q durch lineare Interpolation aus $\frac{z_q - z_1}{q' - \Phi(z_1)} = \frac{z_2 - z_1}{\Phi(z_2) - \Phi(z_1)}$.

15.8. Rechnen mit komplexen Zahlen

Mit i rechnen wie mit jeder anderen Variablen auch (!)

Einzige Besonderheit: Jedes i^2 durch -1 ersetzen.

15.8.1. Umrechnung Polarform \rightarrow kartesische Form

- Gegeben ist $z = re^{i\varphi}$, gesucht ist x und y aus $z = x + iy$

1. Umformen in trigonometrische Form $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (Satz von Euler, S11-4)

2. Ausmultiplizieren $x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad z = x + iy$
--

15.8.2. Umrechnung kartesische Form \rightarrow Polarform

- Gegeben ist $z = x + iy$, gesucht ist r und φ aus $z = re^{i\varphi}$

1. Man bestimme $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
--

2. Falls $x \neq 0$: $\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
--

a. Falls $x > 0$ (1. oder 4. Quadrant): $\varphi = \alpha$.

b. Falls $x < 0$ (2. oder 3. Quadrant): $\varphi = \alpha + \pi$.

3. Falls $x = 0$: $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{falls } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
--

4. Mit diesen Werten gilt dann $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Anm.: All dies wird in vielen Computersprachen (Java, C, Maple) kompakt bestimmt durch $\varphi = \text{atan2}(x, y)$.

15.8.3. Potenzen komplexer Zahlen

Wie bestimmt man z.B. $(2+3i)^{20}$?

- Zum Berechnen von Potenzen in die Polarform $z = re^{i\varphi}$ wechseln (s. Rezept 15.8.2). Dort die normalen Potenzgesetze verwenden. Zum Schluss wieder mit Eulerscher Formel, Satz S11-2, in Realteil und Imaginärteil aufspalten (s. Rezept 15.8.1).
- Ist der Exponent $c = p/q$ rational mit teilerfremdem p und q , unbedingt nach dem p -Potenzieren den Term $+2k\pi$ im Exponenten ergänzen:

$$z^c = \left(r e^{i(\varphi + 2k\pi)} \right)^{p/q} = \left(r^p e^{i(p\varphi + 2k\pi p)} \right)^{1/q} = r^{p/q} e^{i \left(\frac{\varphi p}{q} + \frac{2k\pi p}{q} \right)} \quad (\text{s. Kap. 11.3.1}),$$

damit man auch alle Lösungen erhält. Es gibt genau q verschiedene Lösungen $k=0, 1, 2, \dots, q-1$.

15.8.4. Dividieren durch komplexe Zahlen

Wie bestimmt man z.B. Real- und Imaginärteil von $\frac{2i}{1+5i}$?

- Enthält der Nenner eine komplexe Zahl Z : Den Nenner durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl Z^* (Satz S11-3) reell machen.

15.9. Fourierreihen

Die komplexe Fourierreihe $F_M(t) = \sum_{n=-M}^M c_n \cdot e^{in\omega t}$ berechnet man, indem man $\forall n$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-in\omega t} dt, \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

bildet. Evtl. für $n=0$ eine Fallunterscheidung betrachten!

Die Koeffizienten a_n zu $\cos(n\omega t)$ und b_n zu $\sin(n\omega t)$ ergeben sich dann zu

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Nützliche Formeln für die Integralberechnungen falls $m, n \in \mathbf{N}$:

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega x} dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}$$