

V4.VORKURSWISSEN: Funktionen

V4.1. Allgemeine Funktionseigenschaften

Def D 4-1 Nullstelle einer Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt in $x_0 \in D$ eine Nullstelle, falls $f(x_0) = 0$.

In einer Nullstelle schneidet oder berührt der Funktionsgraph die x-Achse.

Beispiel: $f(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2$

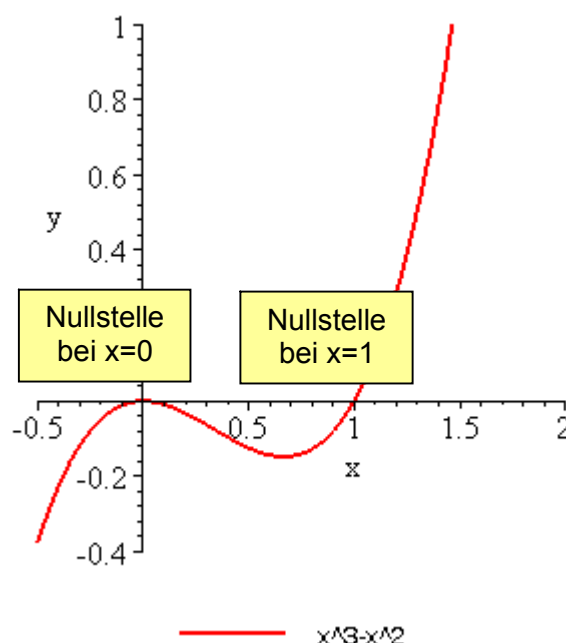


Abbildung 4-1: Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = x^2(x-1)$

Die Funktion $f(x) = x^2(x-1)$ hat zwei Nullstellen und zwar $x_0=0$ und $x_0=1$ (siehe Diagramm).

Def D 4-2 Symmetrie: Gerade und ungerade Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt gerade, falls gilt

(S) für alle $x \in D$ ist auch $-x \in D$

(G) $f(x) = f(-x)$

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt ungerade, falls für alle $x \in D$ gilt

(S) für alle $x \in D$ ist auch $-x \in D$

(U) $f(x) = -f(-x)$

Zur Namensgebung: "gerade", weil alle Polynome mit nur geraden Potenzen gerade Funktionen sind.
 "Symmetrie", weil eine gerade Funktion **spiegelsymmetrisch** zur y-Achse ist und weil eine ungerade Funktion **punktsymmetrisch** zum Ursprung ist

Beispiele:

1.) $y = |x|$ ist eine gerade Funktion, weil wegen $D = D_{\max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$

(Bedingung S) und $f(-x) - f(x) = |-x| - |x| = 0$ (Bedingung G) erfüllt sind.

2.) $y = x^3$ ist eine ungerade Funktion, weil wegen $D = D_{\max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$ (Bedingung U1) und $f(-x) + f(x) = (-x)^3 + x^3 = 0$ (Bedingung U) erfüllt sind.

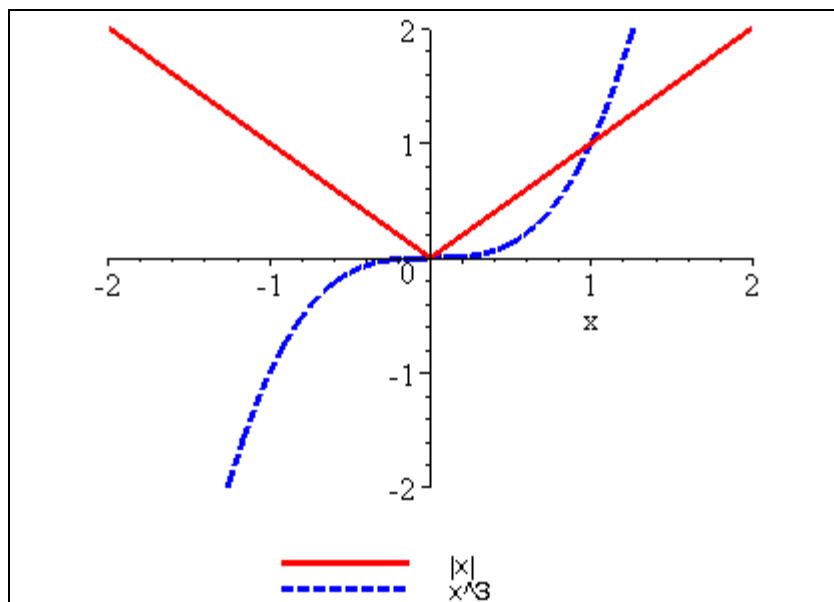


Abbildung 4-2: Beispiel einer geraden Funktion ($y = |x|$) und einer ungeraden Funktion ($y = x^3$).

3.) $y = x^3 - x^2$ ist weder gerade noch ungerade (s. Abb. 4.1). Zwar ist wegen $D = D_{\max} = \mathbf{R}$ für alle $x \in D$ auch $(-x) \in D$ (Bedingung S), aber wegen $f(x) - f(-x) \neq 0$ und $f(x) + f(-x) \neq 0$ ist weder (G) noch (U) erfüllt. Beweis als Übung!

Def D 4-3 Monotonie einer Funktion

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$, $f : D \rightarrow \mathbf{Z}$, und $x_1, x_2 \in D$ seien beliebig. Dann heißt die Funktion f

monoton steigend, falls $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

<u>streng monoton steigend</u> ,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
<u>monoton fallend</u> ,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
<u>streng monoton fallend</u> ,	falls	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Bemerkung: Die Monotoniebedingungen sind schwächer als die der strengen Monotonie, d.h.

(streng monoton steigend) $\Rightarrow$ (monoton steigend) und

(streng monoton fallend) $\Rightarrow$ (monoton fallend)

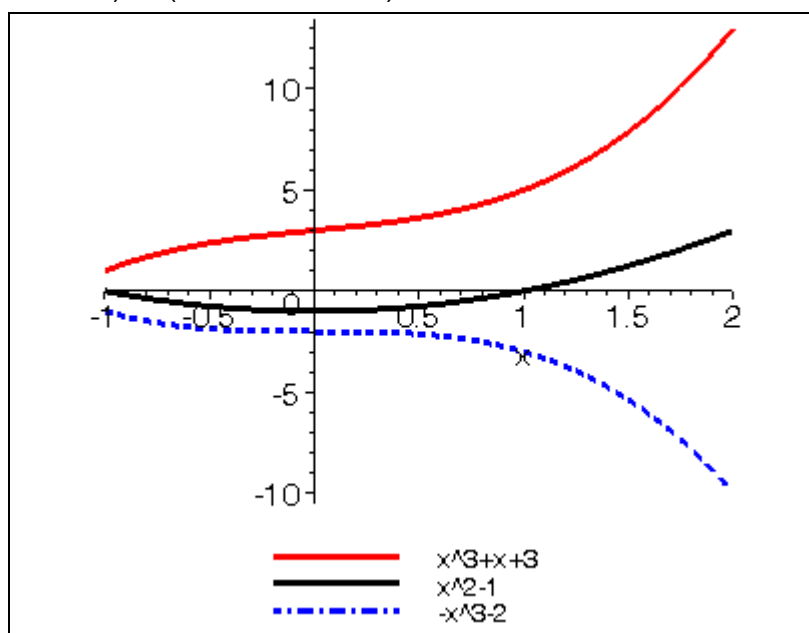


Abbildung 4-3: Beispiele für die Monotonie von Funktionen

$y = x^3 + x + 3$ ist streng monoton steigend,

$y = -x^3 - 2$ streng monoton fallend und

$y = x^2 - 1$ für $x < 0$ streng monoton fallend und für $x > 0$ streng monoton steigend.

Def D 4-4 Periodizität einer Funktion

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{Z}$, $y = f(x)$ heißt periodisch mit der Periode p , falls für alle $x \in D$ (P) $f(x) = f(x + p)$.

Mit p ist auch $(\pm k \cdot p)$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine Periode für f . Die kleinste Periode $p > 0$ einer Funktion heißt primitive Periode von f .

Typische Beispiele periodischer Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen **Sinus**, **Cosinus** etc. (siehe Abschnitt 4.2.2).

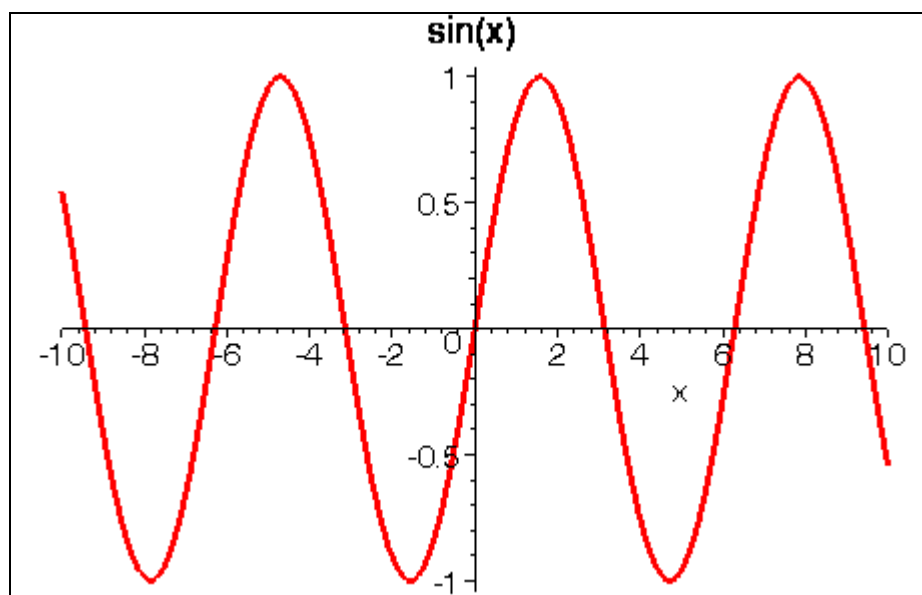


Abbildung 4-4: Periodische Funktion Sinus mit (primitiver) Periode 2π

Wir greifen jetzt die Definition von injektiv, surjektiv und bijektiv für Abbildungen aus Kapitel 1 auf und verwenden sie zukünftig im selben Sinne für Funktionen:

Def D 4-5 Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$, $y = f(x)$ heißt **injektiv (umkehrbar)**, falls *verschiedene* Elemente von D auf *verschiedene* Elemente von Z abgebildet werden, kurz:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in D.$$

Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$, $y = f(x)$ heißt **surjektiv**, falls *jedes* Element von Z das Bild eines Elementes aus D ist, kurz: $f(D) = Z$.

Eine Funktion $f : D \rightarrow Z$, $y = f(x)$ heißt **bijektiv (1-zu-1-Abbildung)**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel / Übung: Prüfen Sie auf Injektivität und Surjektivität

- a) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x+1$
- b) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{\geq 0}$, $g(x) = x^2$

Lösung:

a) f ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ gilt

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1+1) - (2x_2+1) = 2(x_1-x_2).$$

Für $x_1 \neq x_2 \in \mathbf{R}$ gilt somit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

f ist auch surjektiv, denn für jedes $y \in \mathbf{R}$ gibt es ein $x \in \mathbf{R}$, nämlich $x = \frac{y-1}{2}$, wie man durch Auflösen von $y=f(x)$ nach x findet.

b) $y=g(x)$ ist surjektiv, denn für jedes $y \geq 0$ gibt es ein x , nämlich $x = \sqrt{y}$,

g ist NICHT injektiv, denn zum Beispiel ist $g(2) = 4 = g(-2)$.

Die Eigenschaften "injektiv" und "surjektiv" sind mit der Lösbarkeit der Gleichung $f(x)=y$ verknüpft. Im Falle reeller Funktionen sind die Lösungen von $f(x)=y$ genau die Schnittpunkte des Graphen von $f(x)$ mit der waagerechten Gerade durch y . Das ist in Abbildung 4-5 dargestellt: Bei der Funktion in (a) gibt es für jede Gerade mindestens einen Schnittpunkt, im eingezeichneten Fall sogar drei: (a) ist daher surjektiv, aber nicht injektiv. In (b) gibt es für jede Gerade höchstens einen Schnittpunkt, im eingezeichneten Fall aber keinen: Die Funktion ist injektiv, aber nicht surjektiv. Im Fall (c) schließlich hat jede Gerade genau einen Schnittpunkt, die Funktion in (c) ist bijektiv.

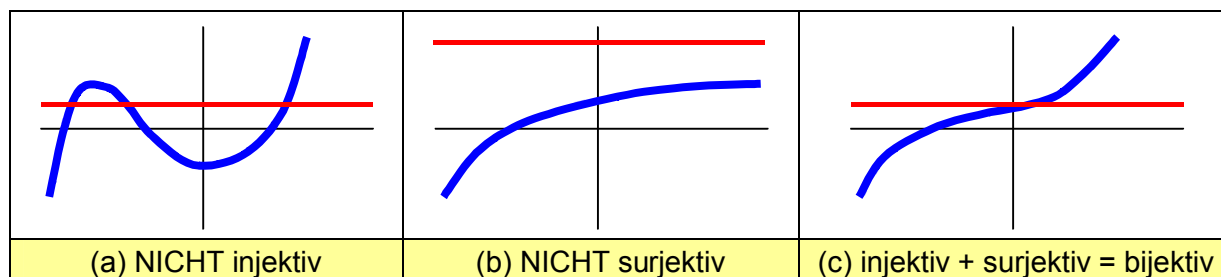


Abbildung 4-5: Injektivität und Surjektivität

[Teschl05, Bd. 1, S. 126]

Meist kann man Funktionen, die NICHT "X"-jektiv sind ("X" = in-, sur- oder bi-) durch passende Einschränkung des Definitionsbereichs und/oder des Wertebereiches "X"-jektiv machen.

V4.2. Funktionsübersicht

4.2.1. Polynome (=ganz-rationale Funktionen) und gebrochen-rationale Funktionen

Rationale Funktionen		
$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n} = \frac{p_m(x)}{q_n(x)} \quad \text{mit } a_i, b_i \in \mathbf{R} \text{ und } m, n \in \mathbf{N}_0$		
Polynome (=ganz-rationale Funktionen)	gebrochen-rationale Funktionen $n > 0$	
	echt-rational	
Nenner = 1 (d.h. $n=0$)	$n > m$	$n \leq m$
Bsp.: $5 + \frac{3}{5}x + x^2 \ln 5$	$\frac{x}{x^2 + \sqrt{2}}$	$\frac{x^2 + 5}{x^2 - x + \pi}$
Definitionsbereich = $\mathbf{R}$, stetig auf ganz $\mathbf{R}$, keine Polstellen	<u>kann</u> Polstellen haben, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	<u>kann</u> Polstellen haben

a) x_0 heißt **k-fache Nullstelle** von $f(x)$, falls sich der Faktor $(x-x_0)$ k-mal aus $p_m(x)$ abspalten lässt (und ein Polynom übrig bleibt).

b) x_0 heißt **k-fache Polstelle** von $f(x)$, falls x_0 k-fache Nullstelle von $q_n(x)$ ist.

Beispiele:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Die Funktion f hat eine einfache Nullstelle bei $x = 1$ und einen einfachen Pol bei $x = -2$.

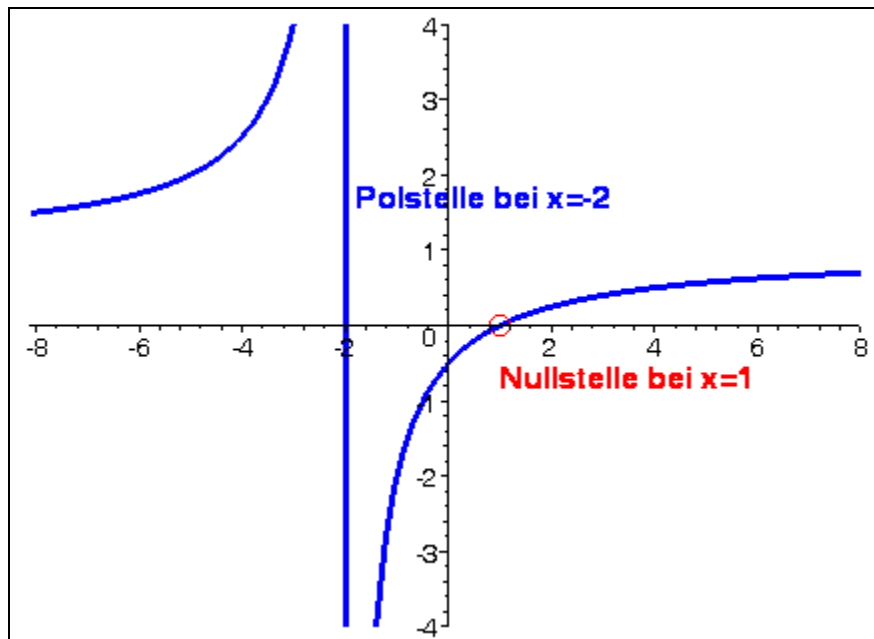


Abbildung 4-6: Die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

b)

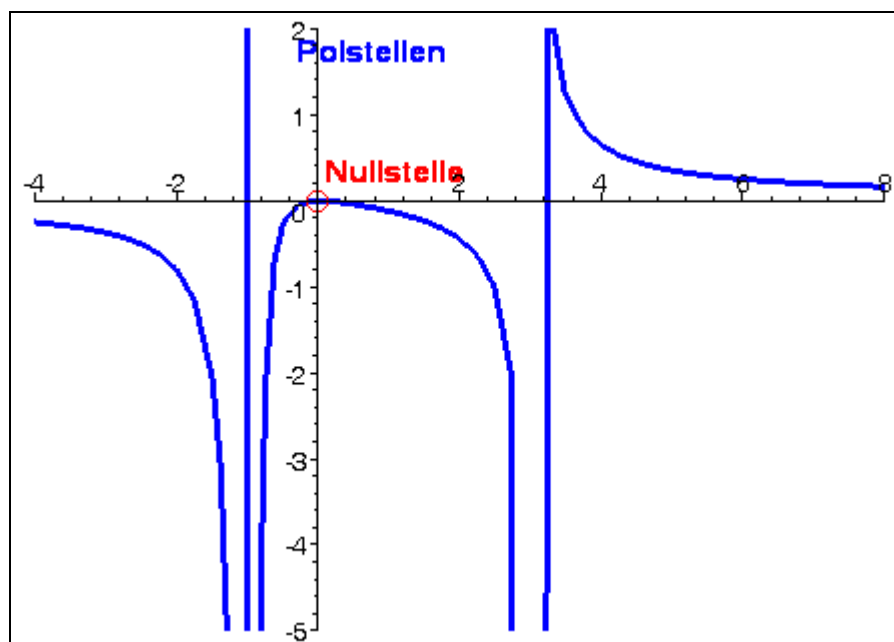


Abbildung 4-7: Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{(x+1)^2(x-3)}$

Die Funktion f hat eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$, einen zweifachen Pol bei $x = -1$ und einen einfachen Pol bei $x = 3$.

4.2.2. Trigonometrische Funktionen

Wozu braucht man Trigonometrie?

Anwendungsfelder trigonometrischer Funktionen sind außer in der Geometrie überall dort, wo Schwingungen oder periodische Abläufe zu beschreiben sind, z.B.:

- Wellen, Pendelbewegung
- Wechselstromkreise etc.

Bogenmaß

In der ebenen Geometrie werden üblicherweise Winkel in Gradmaß gemessen (0° bis 360°). Die Einteilung in 360 Grad ist willkürlich (andere Einteilungen, z.B. in 400, gibt es auch). Mathematiker haben sich auf den Einheitskreis, der den "Universalumfang" 2π hat, und das Bogenmaß geeinigt:

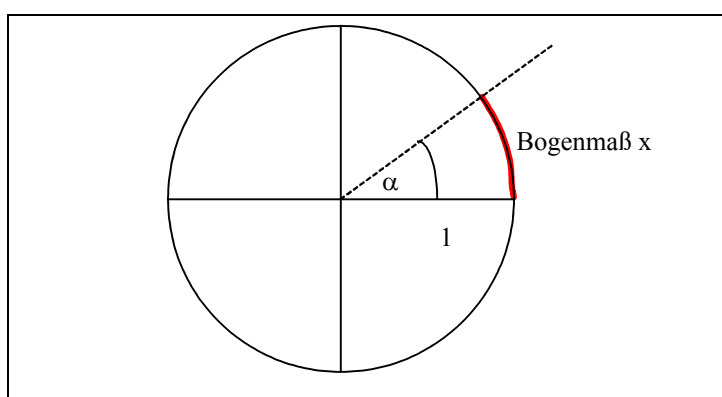


Abbildung 4-8: Bogenmaß versus Gradmaß

Zwischen Bogenmaß x und Gradmaß α besteht die lineare Beziehung:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x$$

mit $\pi = 3.1415\dots$

Tabelle spezieller Winkel:

α	-90°	0°	30°	45°	90°	180°	270°	360°	720°
x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	4π

Drehsinn: positiv: Gegenuhrzeigersinn
 negativ: Uhrzeigersinn

Def D 4-6 Sinus- und Cosinus-Funktion

Der Sinus eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als der Ordinatenwert des zu x gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

Der Cosinus eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als der Abzissenwert des zu x gehörenden Punktes P auf dem Einheitskreis.

$$\sin x = \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{Hypotenuse}} = v - \text{Achsenabschnitt} = \textit{Ordinate}$$

$$\cos x = \frac{\text{"Ankathete"}}{\text{Hypotenuse}} = u - \text{Achsenabschnitt} = \textit{Abszisse}$$

Bemerkung: "Gegenkathete/Hypotenuse" in Anführungszeichen, weil genau genommen nur gültig für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, außerhalb werden Sinus und Cosinus auch negativ.
u- bzw. v-Achsenabschnitt sind da präzisere Bezeichnungen.

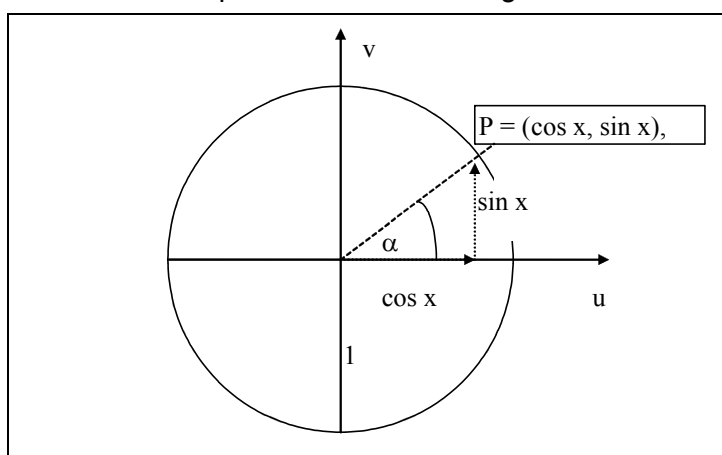


Abbildung 4-9: Darstellung von Sinus und Cosinus im Einheitskreis

Satz S 4-1 Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Im Folgenden sei $k \in \mathbf{Z}$ eine ganze Zahl.

<u>Symmetrie:</u> $\sin(-x) = -\sin(x)$ $\cos(-x) = \cos(x)$	<u>Periodizität:</u> $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$	<u>Nullstellen:</u> bei $x=k\pi$ für Sinus bei $x=\frac{\pi}{2} + k\pi$ für Cosinus
<u>Beschränktheit:</u> $ \sin(x) \leq 1$ $ \cos(x) \leq 1$	<u>Trigonometrischer Pythagoras:</u> $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	

Bemerkung: wir schreiben als Kurzform von $(\sin(x))^2 = \sin^2 x$.

Satz S 4-2 Additionstheoreme

$$\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1+x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$$

Aus den Additionstheoremen lassen sich nützliche Rechenregeln ableiten, z.B.

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

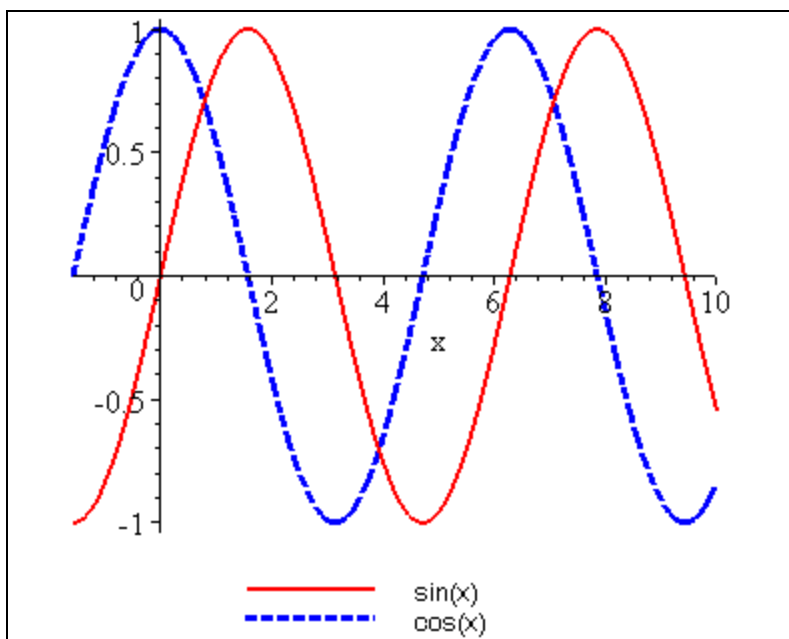


Abbildung 4-10: Graphen der Sinus- und der Cosinus-Funktion

4.2.3. Tangens- und Cotangensfunktion

Wichtig ist eigentlich nur

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

und Cotangens = Kehrwert des Tangens. Der Rest ergibt sich aus den Eigenschaften von Sinus und Cosinus.

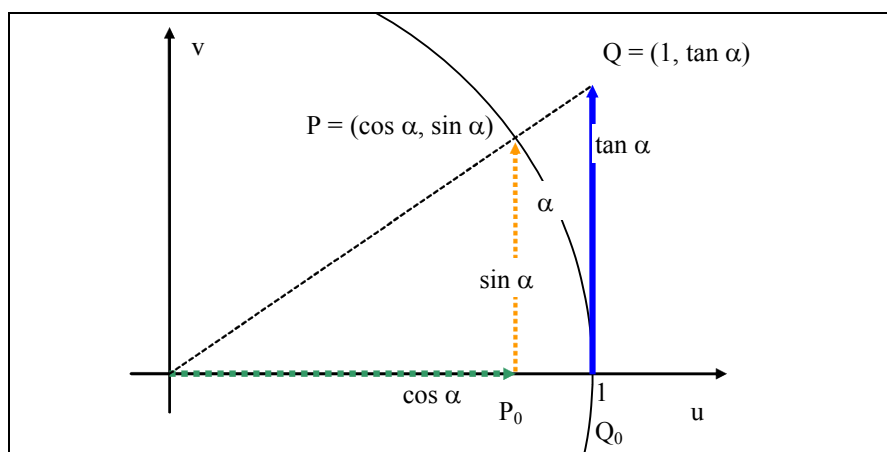


Abbildung 4-11: Darstellung von Tangens mit Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Der Tangens wird wie auch Sinus und Cosinus im Einheitskreis definiert. Er ist hier die Länge der Gegenkathete, wenn die Ankathete die Länge 1 hat. Aus der geometrischen Ähnlichkeit der Dreiecke OP_0P und OQ_0Q folgt $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1}$. An der Skizze können wir weiter-

hin abschätzen, daß für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt: $\sin \alpha < \alpha < \tan \alpha$.

Def D 4-7 Tangens- und Cotangens-Funktion

Der Tangens eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\tan: \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbf{N}\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Der Cotangens eines beliebigen Winkels $x \in \mathbf{R}$ (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\cot: \mathbf{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbf{N}\} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Tangens und Cotangens können im Einheitskreis interpretiert werden als

$$\tan x = \frac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Ankathete"}} = \frac{\text{Ordinate von } P}{\text{Abzisse von } P}$$

$$\cot x = \frac{\text{"Ankathete"}}{\text{"Gegenkathete"}} = \frac{\text{Abzisse von } P}{\text{Ordinate von } P}$$

Bemerkung: "Gegenkathete/Ankathete" in Anführungszeichen, weil genaugenommen nur gültig für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, außerhalb werden Sinus und Cosinus auch negativ.

Satz S 4-3 Eigenschaften von Tangens und Cotangens

Im Folgenden sei $k \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl.

Symmetrie:

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

$$\cot(-x) = -\cot(x)$$

Nullstellen:

bei $x = k\pi$ für Tangens

bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ f. Cotangens

Periodizität:

$$\tan(x + 2k\pi) = \tan(x)$$

$$\cot(x + 2k\pi) = \cot(x)$$

Polstellen:

$\tan x \rightarrow \pm\infty$ bei $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ für Tangens

$\cot x \rightarrow \pm\infty$ bei $x = k\pi$ für Cotangens

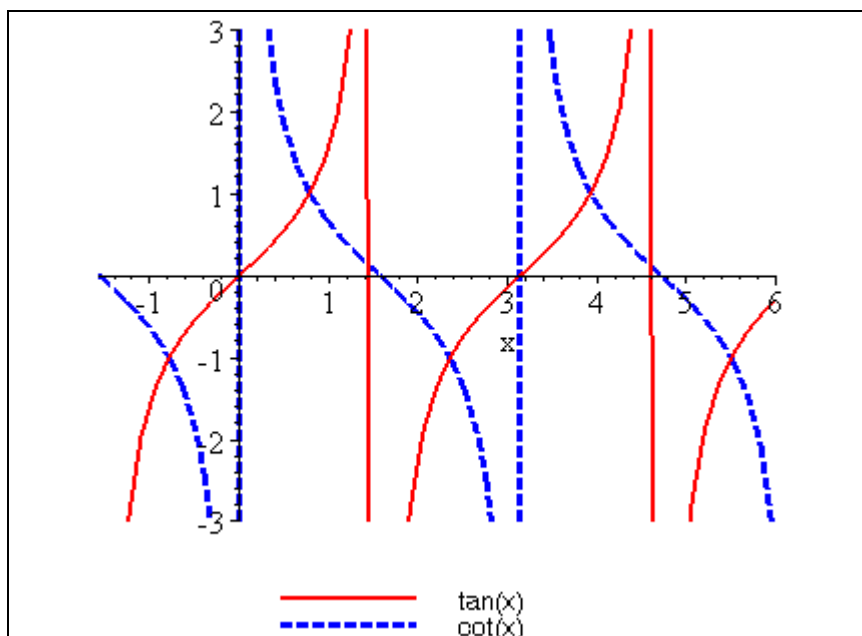


Abbildung 4-12: Tangens- und Cotangensfunktion

4.2.4. Arcusfunktionen

Monotonie

Sinus und Cosinus sind als Funktionen auf $\mathbf{R}$ definiert, aber dort nicht monoton, also auch nicht umkehrbar. Schränkt man allerdings Sinus auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein und Cosinus auf $(0, \pi)$, so sind beide Funktionen streng monoton und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktionen werden als Arcussinus und Arcuscossinus bezeichnet.

Tangens und Cotangens sind auf ihren maximalen Definitionsbereichen nicht monoton. Allerdings ist Tangens auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und Cotangens auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend. Auf diesen Intervallen sind die Funktionen auch umkehrbar. Die Umkehrfunktionen werden als Arcustangens und Arcuscotangens bezeichnet.

Def D 4-8 Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens werden Arcusfunktionen genannt.

Winkelfunktionen

$$\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], x = \sin y$$

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], x = \cos y$$

$$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbf{R}, x = \tan y$$

$$\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}, x = \cot y$$

Arcusfunktion

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ y = \arcsin x = \sin^{-1} x$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \\ y = \arccos x = \cos^{-1} x$$

$$\arctan: \mathbf{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ y = \arctan x = \tan^{-1} x$$

$$\text{arccot}: \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi), \\ y = \text{arccot } x = \cot^{-1} x$$

Hinweis: Schreibweise $\tan^{-1} x$ nicht verwechseln mit $1/\tan x$. Deshalb besser **arctan x** oder **atan x** verwenden!!

Im Definitionsbereich gilt $\arcsin(\sin y) = y$ und $\sin(\arcsin x) = x$ und entsprechend auch für die übrigen Umkehrfunktionen.

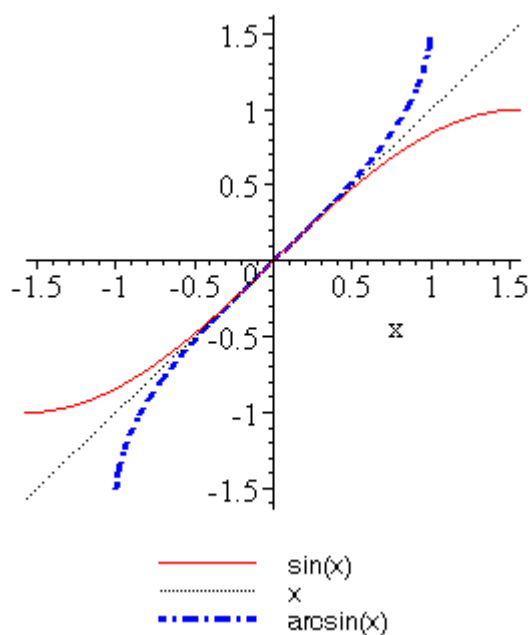


Abb. 4.13: Sinus und Arcussinus

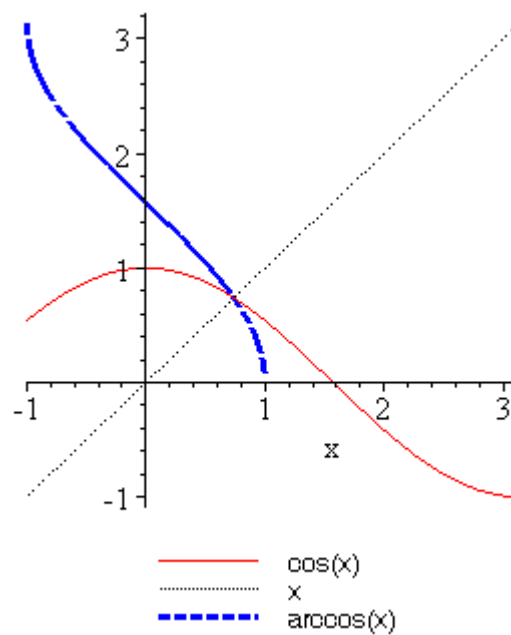


Abb. 4.14: Cosinus und Arcuscosinus

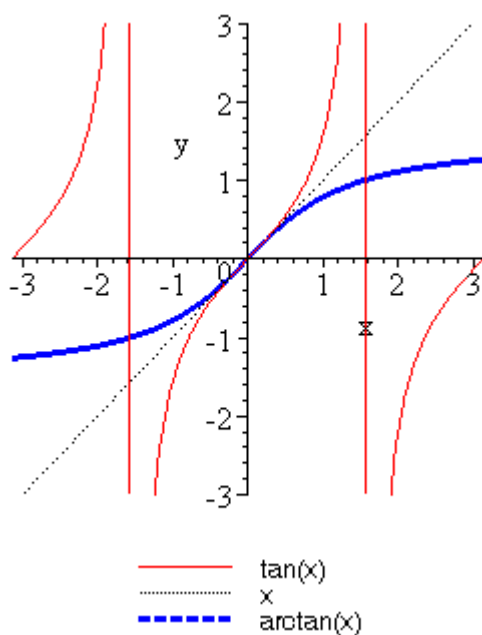


Abb. 4.15: Tangens und Arcustangens

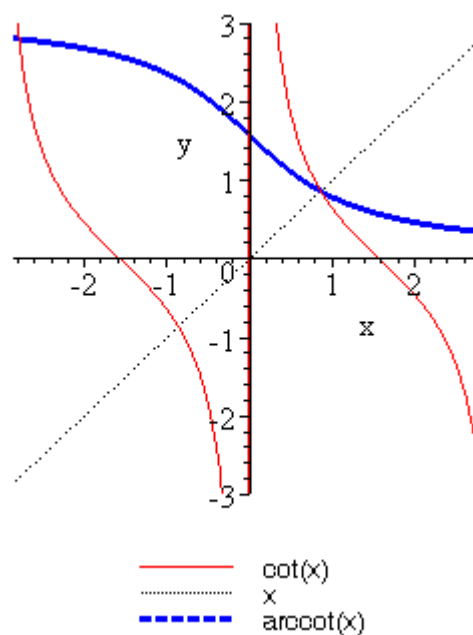


Abb. 4.16: Cotangens und Arcuscotangens

Weitere Eigenschaften der Arcusfunktionen werden in den Übungen besprochen!



Übung: Bei einem Haus mit 20m Breite hat der Dachstuhl eine Giebelhöhe von 5m. Welchen Winkel schließt das Dach mit der Horizontalen ein?

4.2.5. Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus (sinh) und Cosinus hyperbolicus (cosh) sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Sie erfüllen die Additionstheoreme

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh(x_1)\cosh(x_2) \pm \cosh(x_1)\sinh(x_2)$$

$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh(x_1)\cosh(x_2) \pm \sinh(x_1)\sinh(x_2)$$

(Beweis in Übungen)

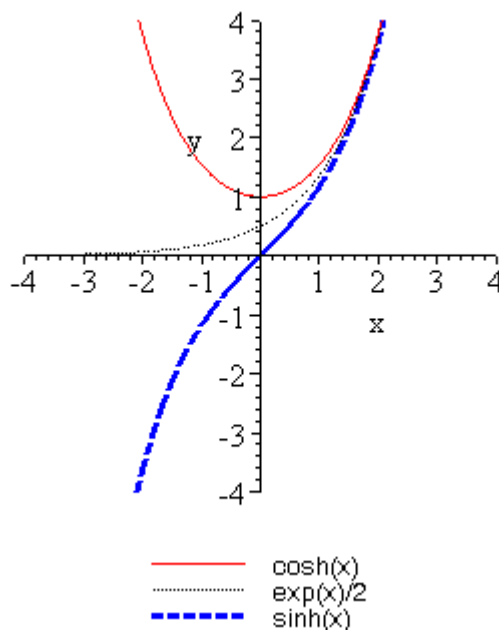


Abbildung 4-17: Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus

Wieso in den Namen dieser Funktionen "Sinus" und "Cosinus" vorkommt, obwohl die Funktionen ja gar nicht periodisch sind, werden wir später verstehen, wenn wir zu komplexen Zahlen und komplexen Funktionen kommen.

⌋ Lösung zur Übung Hausdach: [Skizze machen] $\alpha = \arctan(5/10) \cdot 180/\pi = 26.56^\circ$.