Übungsblatt 1

Logik und Mengen

Aufgabe 1.1 Aussagenlogik

Negieren Sie folgende Aussagen korrekt! Suchen Sie möglichst einfache Ausdrücke für die negierten Aussagen!

a) Super ist billiger als Diesel und der Dieselpreis liegt unter 60 Cent.

b) $0 \leq x+1 \leq +4$

c) Für alle natürlichen Zahlen m gilt: $m^2>m$.

d) Für alle $\varepsilon>0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$

e) Peter wiegt mehr als 80 kg oder Peter und Kalle wiegen zusammen weniger als 160 kg.

Aufgabe 1.2 Mengenschreibweisen

Teilmengen der reellen Zahlen stellt man (i) in der "Für-die-gilt-Schreibweise" oder (ii) in der "**R** ohne" Schreibweise dar. Beispiel:

Die Menge aller positiven reellen Zahlen ist (i) $\{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$ *und (ii)* $\mathbf{R} \setminus (-\infty,0]$.

Stellen Sie folgende Teilmengen jeweils gemäß (i) und gemäß (ii) dar:

(a) Zahlen, die im Intervall [-1,2) liegen

(b) negative Zahlen, die nicht gerade sind

(c) Zahlen, deren Quadrat größer als 4 ist und die kleiner als 20 sind

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie die Richtigkeit der Äquivalenzen:

a) De Morgan'sche Regel 1: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

b) De Morgan'sche Regel 2: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

d) "Ausmultiplizieren 1": $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

e) "Ausmultiplizieren 2": $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

HINWEIS: Wahrheitstafeln.

Aufgabe 1.4

Vereinfachen Sie (mittels der Regeln aus Aufg. 1.3):

a) $(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B}$ b) $\left[(p \wedge q) \vee \overline{q}\right] \Rightarrow q$

Aufgabe 1.5 Widerspruchsbeweis

Beweisen Sie:

a) Für jede positive reelle Zahl x gilt: $x + \frac{25}{x} \geq 10$.

b) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\frac{n^3 + 2}{n^5 + n} > \frac{1}{n^2}$

c) Für jede positive reelle Zahl x gilt: $x + \frac{25}{x} \geq 8$.

Aufgabe 1.6 (+)

Beweisen Sie mithilfe des Schubfachprinzips: In jeder Menge von P Personen gibt es mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Personen kennen. (Wir nehmen an, dass "kennen" eine symmetrische Relation ist, d.h. aus "A kennt B" folgt "B kennt A")

Zahlsysteme

Aufgabe 1.7 Bruchrechnen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme unter Angabe des Definitionsbereichs (bringen Sie auf einen gemeinsamen Nenner):

a) $T(z) = 2\frac{z+2}{z^2-1} - 4\frac{z-1}{z+1}$

b) $T(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{x+y}{x^2 - xy} - \frac{x+y}{xy + y^2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{x}}}$

Aufgabe 1.8 Darstellung reeller Zahlen

Rechnen Sie die folgenden Zahlen in Brüche um:

$a) 3.\overline{324} \quad b) -1.\overline{863} \quad c) 0.\overline{099}$

Aufgabe 1.9 Potenzen und Logarithmen I

Suchen Sie einfachere Schreibweisen der folgenden Ausdrücke (a,b,c,x,y,z > 0)

$a) T(x,y) = \sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}}$ $\qquad b) T(z) = \frac{\sqrt[6]{z^{-4}} \cdot \sqrt[3]{z^2\sqrt{z^3}}}{\sqrt{z^{-2}\sqrt{z}}}$

$c) \ln(\frac{ac}{b}) - \ln(c^4) + \ln b,$ $\qquad d) \log_a\left(\left(a(b+1)\right)^\lambda\right)$

Hinweis zu a),b): Bringen Sie auf die Form: $\left(\frac{y}{x}\right)^{m/n}$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 14./15.10.08 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 1.10 Potenzen und Logarithmen II

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf!

(a) $4^{2x} = 0.25$ (b) $\sqrt[x]{64} = 16$ (c) $17.8^{5x+3} = 41.23$ (d) $25^{\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{5}$

(e) $-0.5 = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ (f) $0.4^{5-3x} \cdot 25 = 9.2^{x+2}$ (g) $\log_3(\log_9(x)) = -2$

Aufgabe 1.11 Exponentialfunktion

Die Weltbevölkerung wächst exponentiell, d.h. ihr Verlauf kann durch $w(t) = a \cdot e^{\lambda t}$ beschrieben werden. Wenn die Bevölkerung 5.5 Mrd Menschen im Jahr 2000 und 3.2 Mrd. Menschen im Jahr 1950 betrug, was war dann die Bevölkerung im Jahre 1900?

HINWEIS: Man stelle zwei Gleichungen auf!

Aufgabe 1.12 Lösen von Gleichungen

a) Ein Kreis um (a,b) mit Radius R läßt sich mathematisch beschreiben durch einen oberen Halbkreis $y = f_o = b + \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$ und einen unteren Halbkreis $y = f_u = b - \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$. Bestimmen Sie die Schnittpunkte zwischen der Geraden y = x+2 und dem Kreis um (a,b)=(1,2) mit Radius 2!

b) Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $|3x-6| + |4x+12| = 24$.

HINWEIS: Oft hilft eine Skizze für die Fallunterscheidung!

c) Man bestimme analytisch alle Nullstellen von f(x) (Probe nicht vergessen!):

$$f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} - \frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$$

Aufgabe 1.13 Ungleichungen

Lösen Sie folgende Ungleichungen nach x auf:

a) $7x - 5 \geq 9x - 2$ b) $\frac{1}{x} < 4$ c) $\frac{24+x}{x} + 1 < 5$ d) $\frac{x^2+5}{x+1} > 3$

Zur Kontrolle möge man die Ergebnisse der Aufgaben – wo sinnvoll möglich - mit Maple kontrollieren!