Bereiten Sie die Aufgaben für den 11./12.11.08 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 2

Summen

Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(i) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{2n\cdot 2(n+1)}$

(ii) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\ldots-\frac{1}{100^2}$

b) Transformieren Sie den Index in $\sum_{n=6}^{12}\frac{1}{n-3}$ so, dass

(i) von i = 1 ab summiert wird,

(ii) über $\frac{1}{\mathrm{m}}$ summiert wird.

c) Man berechne $\sum_{\mathrm{k}=1}^{201}\frac{1}{\mathrm{k}+2}-\sum_{\mathrm{k}=4}^{204}\frac{1}{\mathrm{k}-2}$

Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

a) $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=3}^{4}(k-2)\cdot i$,

b) $\sum_{k=1}^{10}\sum_{i=-5}^{5}\ln(k^2+k)\cdot i$,

c) $\sum_{m=2}^{6}\sum_{n=0}^{39}(mn-2m-4)$

Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis n=6 auf und berechnen Sie damit $(2\text{-}c)^6$.

Folgen

Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte g der Folgen $(a_n)_{n\in N}$ bzw. $(a_k)_{k\in N}$

a) $a_n=\frac{1-5n^2}{1-8n^2}$, $a_n=\left(7-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$, $a_k=\left(\frac{1-2k}{4k+2\sqrt{k}}\right)^3$

$$a_n=\frac{9\cdot 10^n+4\cdot 10^{2n}}{3\cdot 10^{n/2}+50\cdot 10^{2n-1}}$$

b) $a_n = n(\ln n - \ln(n+3))$ Hinweis:Benutzen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

c) $a_k = \dfrac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}-\sqrt{2k-3}}$, $a_k = \sqrt{k+2}+\sqrt{k+5}$, $a_k = \sqrt{k+2}-\sqrt{k}$

Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{1+4n}-\dfrac{n^2}{2n-2}\right)$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\binom{n}{2}}{n(n-2)}+\left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{2n^2}{2n-1}\right)\right)$

Aufgabe 2.6 Eulersche Zahl e (+)

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$ eine alternative Formel für die Eulersche Zahl

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ist!

HINWEIS: Binomischer Satz.

Testen Sie (mit Excel oder Maple) aus: Welche der beiden Formeln konvergiert schneller?

Aufgabe 2.7 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration[1] eine näherungsweise Lösung der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a) $x\ln x = 50$ b) $\frac{1}{2}x - 5 = \ln x$ c) $\sin(x) = 2(x+1)$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als ± 0.1 auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* Arten aus, nach x aufzulösen. Was funktioniert, was nicht?

[1] Bringen Sie also die Gleichung in eine Form x = g(x) (*mehrere* Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte x_0 und bilden Sie die rekursive Folge $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = \ldots$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 11./12.11.08 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 2.8 O()-Notation und Laufzeitverhalten

Wir haben verschiedene Algorithmen, deren Laufzeitverhalten L(n) und deren konkrete Laufzeit für n=10 bekannt sei. (Wir nehmen an, dass in "O(X)" andere Terme als der führende Term vernachlässigbar seien.)

Laufzeit L(n)	n=2	n=10	n=1.000	n=100.000	relative Steigerung Problemgröße zu n=1.000 bei 100x schnellerem Rechner
O(lg(n))		10μs			
O(n)		10μs			
O(n lg(n))		10μs			
O(n^2)		10μs			
O(2^n)		10μs			

Füllen Sie den Rest der Tabelle aus!

Anmerkungen / Hinweise:

- Wenn die Zahlen in μs zu groß werden, wechseln Sie auf Sekunden, Stunden oder Jahre.
- Zur letzten Spalte "relative Steigerung": Mit unserem alten Rechner berechnen wir ein Problem der Größe n=1000 in der Zeit T. Nun bekommen wir einen Rechner NEU, der 100x schneller ist. Die Frage ist: An welcher Problemgröße n_{NEU} hätte der alte Rechner die Zeit 100·T zu arbeiten? Das ist es, was der neue Rechner in Zeit T schafft. Wenn z.B. n_{NEU}=5700 herauskäme, dann wäre die relative Steigerung r=5700/1000 = 5.7. Rechnen Sie dieses r für jede Zeile aus!
  Die schwierigste Zeile hierbei ist Zeile 3. Zeigen Sie, dass man auf eine Gleichung der Form $r = \frac{300}{\lg(r)+3}$ kommt. Lösen Sie diese Gleichung näherungsweise durch Fixpunkt-Iteration!

(noch) Zahlsysteme

Aufgabe 2.9 Löse nach x auf!

(a) $e^x = 2e^{-x+2}$ (b) $\ln(x) + \ln(x+2) = 0$

Aufgabe 2.10 Modulare Arithmetik / Prüfziffern

a) Berechnen Sie möglichst effizient und ohne Taschenrechner
   (i) (99·236) mod 5 (ii) (27 +82·13) mod 4
b) Welche Prüfziffer p macht 0-9380-2191-p zu einer gültigen ISBN ?
c) Es wird die ISBN 0-8380-2191-p eingegeben (mit dem p aus Teil b)), also ein Einzelfehler an der zweiten Stelle. Wird der Fehler erkannt?
d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-8x80-2191-p wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?