Übungsblatt 5 Lineare Algebra

Aufgabe 5.1 Vektorrechnung

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

- (a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{x}$, (b) $\vec{v} \times \vec{w} + 2\vec{w}$, (c) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w}$
 (d) den Einheitsvektor in Richtung von $\vec{w}$.

Aufgabe 5.2 Schnittpunkte, Schnittgerade

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Stellen Sie die Gleichungen auf für die Ebene E_1 , die durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ geht; für die Ebene E_2 , die durch $\vec{f}, \vec{g}, \vec{a}$ geht; für die Gerade G , die durch $\vec{f}, \vec{g}$ geht.
 (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P von E_1 und G .
 (c) Bestimmen Sie die Schnittgerade S von E_1 und E_2 .
 (d) Haben die Geraden G und S einen gemeinsamen Punkt?

Aufgabe 5.3 Ebenen

Seien $E_1 = \left\{ \vec{x} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$ und $E_2 = \left\{ \vec{x} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$ zwei

Ebenen.

- (a) Welche Schnittgerade g haben E_1 und E_2 ? Machen Sie die Probe: Erfüllt jeder Punkt der Geraden g die Ebenengleichungen E_1 und E_2 ?
 (b) Rechnen Sie für E_1 die Hesse-Form $E_1 = \left\{ \vec{x} \mid \hat{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \right\}$ in die $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ -Form um:
 $E_1 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{r} + \mu \vec{s} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathfrak{R} \right\}$. Machen Sie auch hier die Probe, indem Sie die $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ -Form wieder in die Hesse-Form zurückrechnen!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 13./14.01.09 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 5.4 Abstand zwischen parallelen Ebenen, Abstand Punkt – Ebene

- (a) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\mathbf{c}$ aus Aufgabe 5.2 zur Ebene E_1 aus Aufgabe 5.3!

(b) Sei $E_3 = \{\vec{x} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0\}$ eine weitere Ebene, die zu E_1 parallel ist.

Welchen Abstand haben E_1 und E_3 zueinander?

Aufgabe 5.5 Gauss-Elimination mit Parameter

Gegeben sei das Gleichungssystem
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

- (a) Für welches $\lambda \in \mathbf{R}$ hat das Gleichungssystem **keine eindeutige** Lösung? Begründung!
 (b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem **Gauß'schen Eliminationsverfahren** und geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von λ an. Machen Sie, wenn nötig, eine Fallunterscheidung!
 (c) Gibt es für den Fall $\lambda = -2$ eine Lösung, die auch $x_2 = 1/4$ erfüllt? Machen Sie die Probe!

Aufgabe 5.6 Inverse Matrix

Bestimmen Sie mit dem **Gauss-Jordan-Verfahren** die Inverse zur Matrix

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Machen Sie auch hier die Probe, dass $AA^{-1} = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Man überprüfe die Lösungen zu Aufgabe 5.1 – Aufgabe 5.6 mit **Maple!**