# Rezepte Mathematik 1 + 2

Nachfolgend eine Kurzfassung von Rechenrezepten für die Lösung von Standardaufgaben der Mathematik 1 und 2.

Die Rezepte sind kurz und knapp und setzen das Verständnis der jeweiligen Stoffkapitel voraus. Fallweise die angegebenen Querverweise auf Kapitel im Skript nacharbeiten!

Die Rezeptsammlung ist keinesfalls vollständig!! Eine Haftung für die Richtigkeit wird auch nicht übernommen, wenngleich ich mich um richtige Darstellung bestens bemühe!

/WK/ 19.06.2010

## Inhalt:

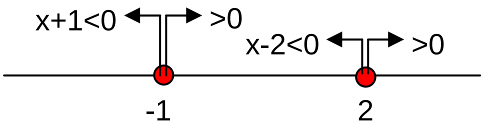
# *Rezepte für Mathematik 1 (Wintersemester)*

## *15.1. Lösen von (Un-)Gleichungen*

### 15.1.1. Betragsgleichungen

Wie löst man z.B. $|x+1| = 2|x-2|$ ?

1. Umschlagspunkte für alle N Beträge bestimmen
2. Skizze machen
3. N+1 Fallunterscheidungen: jeweils Gleichung lösen
4. Probe: Paßt Lösung in Bereich?




### 15.1.2. Nullstellen finden

Wie löst man $f(x) = 0$ ?

1. Prüfen, ob sich $f(x)$ als Produkt von (2 oder mehr) Faktoren schreiben läßt.
2. Wenn ja: $f(x)$ ist 0, sobald einer der Faktoren 0 ist. (Die Lösungsmenge ist die Vereinigungsmenge der Nullstellen der Faktoren.)
3. Bei Polynom 2. Grades: Quadratische Ergänzung oder p-q-Formel.

### 15.1.3. log- und exp-Gleichungen

Wie löst man z.B. $\ln(x) + \ln(x+2) = 0$ ?

1. Möglichst alle Terme mit log und Variable x (bzw. exp und Variable x) zusammenfassen oder auf verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens isolieren.
2. Auf beiden Seiten "e hoch" (bzw. "log") (ist Äquivalenzumformung)
3. Probe, ob Lösung(en) im Def. bereich

### 15.1.4. Wurzelgleichungen

Wie löst man z.B. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-4x} - 1 = 0$ ?

1. Mindestens eine Wurzel isolieren
2. Quadrieren (ACHTUNG: ist "$\Rightarrow$"-Umformung)
3. Falls noch Wurzel übrig: Weiter bei 1.
4. Probe: Erfüllt jede Lösung die Ausgangsgleichung?

### 15.1.5. Ungleichungen

Wie löst man z.B. $\dfrac{5x^2 + x}{x^2 - 1} \le 5$ ?

1. Bei jedem Durchmultiplizieren mit unbestimmtem Term $T(x)$: Fallunterscheidung $T(x)<0$ und $T(x)>0$ liefert 2 Einzel-Ungleichungen.
2. Jede Einzel-Ungleichung lösen.
3. Probe, ob Einzel-Lösungsmenge (Bereich) mit dem Bereich der Fallunterscheidung zusammenpaßt (d.h. die Schnittmenge beider Bereiche bilden).

Wie löst man eine quadratische Ungleichung, z.B. $x^2 + 2x > 4$ ?

Wir erzeugen links durch **quadratische Ergänzung** ein vollständiges Quadrat, hier: $(x+1)^2 > 5$. Es gilt: $a^2 > b^2 \quad \Leftrightarrow \quad |a| > |b|$. [Knorrenschild, S. 97, 115]

Also hier:

$$
\begin{aligned}
& |x+1| > \sqrt{5} \\
\Leftrightarrow\ & (x < -1 \wedge -(x+1) > \sqrt{5}) \quad \vee \quad (x > -1 \wedge \ (x+1) > \sqrt{5}) \\
\Leftrightarrow\ & (x < -1 \wedge -\sqrt{5} - 1 > x) \quad \vee \quad (x > -1 \wedge \ x > \sqrt{5} - 1) \\
\Leftrightarrow\ & x < -\sqrt{5} - 1 \quad \vee \quad x > \sqrt{5} - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x \ \in \ ]-\infty, -\sqrt{5} - 1[ \ \cup \ ]\sqrt{5} - 1, +\infty[
\end{aligned}
$$

## 15.2. Grenzwerte ermitteln

Hier gibt es nicht <u>ein</u> Standardverfahren, sondern verschiedene Ansätze, die man kreativ ausprobieren muss:

- Wenn $\lim\limits_{n\to\infty}$ und gebrochen rationale Funktion in n: Durch **g**rößte n-**P**otenz **im N**enner (**gPiN**) dividieren, dann Limes in jeden einzelnen Term in Zähler und Nenner „hineinziehen“. (Satz S3-4 und S3-5)
- „Hineinziehen“ nur erlaubt, wenn dabei keine unentscheidbare Situation ("$\infty / \infty$", "$\infty - \infty$" oder sonstiges nach Satz S3-5) herauskommt
- Bei unentscheidbarer Situation "$\infty / \infty$" schauen, ob man vorher einen gemeinsamen Faktor (z.B. $\sqrt{n}$) im Zähler und Nenner ausklammern kann.
- Bei unentscheidbarer Situation "$\infty - \infty$" schauen, ob man vorher durch geeignete Umformungen (Hauptnenner, Binomische Formel, ...) auf entscheidbare Situation kommt.
- Wenn $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$: prüfen, ob die Voraussetzungen des Satzes Satz S5-10, Regeln von **L'Hospital** ("0/0-Situation" oder "∞/∞-Situation") vorliegen. Wenn ja, dann $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ betrachten.
- Evtl. L'Hospital wiederholt anwenden.
- Ergebnis L'Hospital gilt nur, wenn zum Schluss ein endlicher Grenzwert herauskommt.
- Für uneigentliche Grenzwerte: von "links" und von "rechts" betrachten, z.B.

  $$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"}0+\text{"}} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\text{"}0-\text{"}} = -\infty,$$

  d.h. wenn der Nenner für jede erlaubte x-Folge eine positive Nullfolge ist, ist der Limes $+\infty$, wenn er eine negative Nullfolge ist, ist der Limes $-\infty$.

## 15.3. Taylor-Entwicklung

Gegeben: f(x), $x_0$. Gesucht: Taylorentwicklung T(x) zu f(x) um $x_0$ bis zur n=3. Ordnung.

1. Man bilde f'(x), f''(x), $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2. Tabelle bauen (bis n+1 = 4):

| n | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(x_0)$ |
|---|---|---|
| 0 | f(x) | $f(x_0) \quad = t_0$ |
| ... | ... | ... |
| n | $f^{(n)}(x)$ | $f^{(n)}(x_0) \ = t_n$ |
| n+1 | $f^{(n+1)}(x)$ | |

(In der letzten Spalte stehen nur Zahlen oder Terme, die wir mit $t_n$ abkürzen)

3. Taylorformel aufschreiben:

$$T(x) = t_0 + t_1 \frac{(x-x_0)^1}{1!} + \ldots + t_n \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Wenn zusätzlich nach einer Fehlerabschätzung (Restglied) gefragt ist, z.B.: "Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für beliebige $x \in [5,6]$ statt $f(x)$ das Taylorpolynom n. Ordnung um $x_0 = 5$ benutzt?"

4. Eine obere Schranke der Funktion $r(u) = |f^{(n+1)}(u)|$ in $[5,6]$ bestimmen [entweder das globale Maximum mit Rezept 15.5.1 (Ränder beachten!) oder eine gröbere Abschätzung (obere Schranke) für dieses Maximum] $\rightarrow$ Ergebnis $C$.
5. Der maximale Fehler ist dann $\frac{C}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ (Satz S5-9)

## 15.4. Matrizen multiplizieren

Gesucht: **C** = **A B**.

Geht nur, wenn Spaltenzahl **A** = Zeilenzahl **B**.

Man schreibt **A** links und **B** oberhalb der Zielmatrix **C**, z.B.:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ |
| | | $b_{21}$ | $b_{22}$ | $b_{23}$ |
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ |

Es gilt dann für Zielelement $c_{ik}$ = "i-te Zeile von **A**" mal "k-te Spalte von **B**", wobei die entsprechenden Einzelelemente multipliziert und die Produkte summiert werden, also z.B.

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$.

# *Rezepte für Mathematik 2 (Sommersemester)*

## *15.5. Extremwerte, lokal und global*

### 15.5.1. 1 Veränderliche (gehört noch zu Mathe 1)

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion f(x) in [a,b]?

0. Wenn f **monoton** ist, dann liegen die Extrema an den Rändern, fertig! – Sonst:
1. Man bilde f'(x) und f''(x).
2. Lösungen $x_i$ von f'(x) = 0 sind <u>Kandidaten</u> für lokale Extrema.
3. Tabelle bauen:

| x | f(x) | f''(x) | |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f''(x_1)$ | Wenn $f''(x_i) > 0$: lokales Minimum |
| ... | ... | ... | ... <0: lokales Maximum |
| $x_n$ | $f(x_n)$ | $f''(x_n)$ | ... =0 *<u>und</u>* $f'''(x_i) \neq 0$: Sattelpunkt<br>(Wenn $f'''(x_i)=0$: Sonderfall nach Satz S5-13) |

Falls <u>globale</u> Extrema gefragt sind: Wenn die Funktion nur 1 relatives Extremum hat, kann dies an den Rändern nicht übertroffen werden, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | f(a) | | Ränder nicht vergessen! |
| b | f(b) | | |

[Falls a= - ∞ oder b=∞, dann $\lim\limits_{x \to -\infty}$ oder $\lim\limits_{x \to \infty}$ benutzen]

5. Das <u>globale Maximum</u> ergibt sich aus dem Maximum von $\{f(a),f(b),f(x_i) \mid x_i$ ist lokales Maximum$\}$. Analog für <u>globales Minimum</u>.

### 15.5.2. 2 Veränderliche

Wo liegen die Extrema der stetigen Funktion F(x,y) in $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ ?

1. Man bilde die partiellen Ableitungen $F_x$, $F_y$, $F_{xx}$, $F_{xy}$, $F_{yy}$.
2. Lösungen $(x_i,y_i)$ von $F_x(x_i, y_i) = 0 \wedge F_y(x_i, y_i) = 0$ sind <u>Kandidaten</u> für lokale Extrema.
3. Tabelle bauen ($\Delta=F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2$):

| x | y | F(x,y) | Δ(x,y) | $F_{xx}(x,y)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_1$ | $F(x_1,y_1)$ | $\Delta(x_1,y_1)$ | $F_{xx}(x_1,y_1)$ | Wenn $\Delta>0 \wedge F_{xx}>0$: lokales Minimum |
| ... | ... | ... | ... | ... | Wenn $\Delta>0 \wedge F_{xx}<0$: lokales Maximum |
| $x_n$ | $y_n$ | $F(x_n,y_n)$ | $\Delta(x_n,y_n)$ | $F_{xx}(x_n,y_n)$ | Wenn $\Delta<0$: kein Extremum; =0: unentscheidb. |

Falls **<u>globale</u>** Extrema gefragt sind: Gelten die Bedingungen an Δ und $F_{xx}$ **für alle** $(x,y) \in D$ (Satz S 8-5), dann ist's ein globales Extremum, wir sind fertig! – Sonst:

4. Tabelle verlängern:

| x | y | F(x,y) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $F(a_1,a_2)$ | | | Eckpunkte nicht vergessen! |
| $a_1$ | $b_2$ | $F(a_1,b_2)$ | | | |
| $b_1$ | $a_2$ | $F(b_1,a_2)$ | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | $b_2$ | $F(b_1,b_2)$ | | | |

[Falls $a_1,a_2,b_1,b_2 = \pm\infty$, dann $\lim\limits_{x\to-\infty}$ oder $\lim\limits_{x\to\infty}$ benutzen]

5. Ränder: Man bestimme alle lokalen Extrema der 4 Funktionen $F(x,a_2)$, $F(x,b_2)$, $F(a_1,y)$, $F(b_1,y)$ (für jede Funktion Rezept 15.5.1, Schritt 1.-3., durchführen).
   [Falls z.B. $a_1 = -\infty$, dann $\lim\limits_{x\to-\infty}$ benutzen. Ist $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = -\infty$, braucht man $F(a_1,y)$ nicht weiter untersuchen (dort kann kein Maximum liegen!). Ebenso nicht die Eckpunkte $F(a_1,a_2)$ u. $F(a_1,b_2)$.]
6. Das globale Maximum ergibt sich aus dem Maximum der lokalen Extrema im Innern, der lokalen Extrema an den Rändern und der Eckpunkte. Analog für globales Minimum.

## *15.6. Lagrange-Methode (Extrema mit Nebenbed.)*

Gegeben sei eine zu maximierende Funktion g(x,y) = Max und eine Nebenbedingung r(x,y)=c.

1. Umformen der Nebenbedingung auf $s(x,y) = r(x,y) - c = 0$.
2. Hilfsfunktion $F(x,y,\lambda) = g(x,y) + \lambda s(x,y)$.
3. Gleichungssystem bilden: $F_x(x,y,\lambda)=0 \quad \wedge \quad F_y(x,y,\lambda)=0 \quad \wedge \quad s(x,y)=0$.
4. $\lambda$ eliminieren
5. Lösungen für x und y bestimmen.

Bei mehreren Lösungen: Durch Einsetzen in g(x,y) sieht man, welche Lösung Minimum und welche Maximum sein kann. Den Nachweis, dass es Minima / Maxima sind, braucht man in der Regel nicht zu führen.

## *15.7. Normalverteilte Zufallsvariable*

Alle "Regeln Nr." beziehen sich auf Satz S10-12.

**Satz S10-12 Regeln für Normalverteilungen**

1. $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.
2. Ist $X$ eine $N(\mu,\sigma)$-verteilte Zufallsvariable, so ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $N(0,1)$-verteilt.
3. Für die Verteilungsfunktion $F(b)=P(X\le b)$ gilt: $F(b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$
4. $P(a < X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
5. $q = \Phi(z_q) \quad \Leftrightarrow \quad 1-q = \Phi(-z_q)$
6. Ist $z_q$ das q-Quantil einer $N(0,1)$-Verteilung, so ist $x_q = \sigma\cdot z_q + \mu$ das q-Quantil einer $N(\mu,\sigma)$-Verteilung.

### 15.7.1. Aufgabentyp 1: Wahrscheinlichkeit gefragt

Sei X N($\mu$,$\sigma$)-verteilt. Bei bekanntem b ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \le b)$ gesucht.

| | |
|---|---|
| 1. | Nach Regel Nr. 3 gilt $P(X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(z)$ |
| 2. | $\Phi$-Wert aus Tabelle ablesen. |
| 3. | Falls z<0, dann $\Phi$(-z) aus Tabelle ablesen und $\Phi$(z)=1 – $\Phi$(-z) benutzen (Regel Nr. 1). |

Varianten:

1. Falls nach $P(X>b)=q'$ gefragt ist: Umformen auf $P(X \le b) = 1-q' = q$.
2. Falls nach $P(a < X \le b)$ gefragt ist, dies auf $P(X \le b) - P(X \le a)$ ("obere Grenze – untere Grenze") umformen und Rezept für beide Wahrscheinlichkeiten verwenden.

### 15.7.2. Aufgabentyp 2: b (Schwellwert), $\mu$ oder $\sigma$ gefragt

Bei N($\mu$,$\sigma$)-verteiltem $X$ sei in $P(X \le b) = q$ der Wert $q$ bekannt. Gesucht ist $b, \mu$ oder $\sigma$.

| |
|---|
| 1. q-Quantil $z_q$ der N(0,1)-Verteilung aus Tabelle bestimmen:<br>a. "**nächster Nachbar**": Für welches $z_q$ ist $\Phi(z_q)$ möglichst nahe bei q? Falls $q<0.5$: Regel Nr. 5 benutzen: $1-q = \Phi(-z_q)$. Man liest also einen Wert für $-z_q$ ab, Minuszeichen beachten! |
| 2. $z_q = \frac{b-\mu}{\sigma}$ nach $b$, $\mu$ oder $\sigma$ auflösen. |

Varianten:

3. Falls nach $P(X>b)=q'$ gefragt ist: Umformen auf $P(X \le b) = 1-q' = q$.

Verbesserte Version zu "**nächster Nachbar**" in Schritt 1 ist "**lineare Interpolation**"

a. aus Tabelle die konsekutiven Werte $z_1$ und $z_2$ ablesen mit $\Phi(z_1) \le q \le \Phi(z_2)$
b. $z_q$ linear interpolieren: aus $z_q = z_1 + \frac{\Delta z}{\Delta \phi}(q - \phi(z_1))$ mit
$\Delta z = z_2 - z_1, \quad \Delta\phi = \phi(z_2) - \phi(z_1)$.

### 15.7.3. Von Binomial zu Normal

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man Binomialverteilung ( $\cong$ Ziehen von n Kugeln mit Zurücklegen, p: Anteil weißer Kugeln in Urne) durch Normalverteilung annähern.

Fragestellung: Wie wahrscheinlich ist $P(X \le b)$, d.h. unter den n gezogenen Kugeln sind bis zu b weiße?

1. Voraussetzung prüfen: Gilt $np>5$ und $n(1-p)>5$ ? (Satz S10-14, Moivre-Laplace)

2. Wenn ja, dann ist X näherungsweise $N(\mu,\sigma)$-verteilt: Berechne
   $\mu = np, \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$ nach Satz S10-10.
3. Weiter mit Rezept 15.7.1.

## *15.8. Rechnen mit komplexen Zahlen*

Mit $i$ rechnen wie mit jeder anderen Variablen auch (!)
Einzige Besonderheit: Jedes $i^2$ durch -1 ersetzen.

### 15.8.1. Umrechnung Polarform → kartesische Form

- Gegeben ist $z = re^{i\varphi}$, gesucht ist $x$ und $y$ aus $z = x + iy$

| |
|---|
| 1. Umformen in trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (Satz von Euler, S11-4) |
| 2. Ausmultiplizieren $x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \Rightarrow \qquad z = x + iy$ |

### 15.8.2. Umrechnung kartesische Form → Polarform

- Gegeben ist $z = x + iy$, gesucht ist $r$ und $\varphi$ aus $z = re^{i\varphi}$

| |
|---|
| 1. Man bestimme $r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ . |
| 2. Falls x≠0: $\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.<br>a. Falls x>0 (1. oder 4. Quadrant): $\varphi = \alpha$ .<br>b. Falls x<0 (2. oder 3. Quadrant): $\varphi = \alpha + \pi$ . |
| 3. Falls x=0: $\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{falls} \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls} \quad y < 0 \end{cases}$ |
| 4. Mit diesen Werten gilt dann $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ . |

Anm.: All dies wird in vielen Computersprachen (Java, C, Maple) kompakt bestimmt durch $\varphi$ = atan2(x,y).

### 15.8.3. Potenzen komplexer Zahlen

Wie bestimmt man z.B. $(2+3i)^{20}$ ?

- Zum Berechnen von Potenzen in die Polarform $z = re^{i\varphi}$ wechseln (s. Rezept 15.8.2). Dort die normalen Potenzgesetze verwenden. <u>Zum Schluss</u> wieder mit Eulerscher Formel, Satz S11-2, in Realteil und Imaginärteil aufspalten (s. Rezept 15.8.1).
- Ist der Exponent $c=p/q$ rational mit teilerfremdem p und q, unbedingt nach dem p-Potenzieren den Term $+2k\pi$ im Exponenten ergänzen:

$$z^c = \left(re^{i(\varphi+2k\pi)}\right)^{p/q} = \left(r^p e^{i(p\varphi+2k\pi)}\right)^{1/q} = r^{p/q} e^{i\left(\frac{\varphi p}{q}+\frac{2k\pi}{q}\right)}$$ (s. Kap. 11.3.1),

damit man auch <u>alle</u> Lösungen erhält. Es gibt genau q verschiedene Lösungen k=0,1,2,..., q-1.

### 15.8.4. Dividieren durch komplexe Zahlen

Wie bestimmt man z.B. Real- und Imaginärteil von $\frac{2i}{1+5i}$ ?

- Enthält der Nenner eine komplexe Zahl $z$: Den Nenner durch Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl $z^*$ (Satz S11-3) reell machen.

## *15.9. Fourierreihen*

Die komplexe Fourierreihe $F_M(t) = \sum_{n=-M}^{M} c_n \cdot e^{in\omega t}$ berechnet man, indem man $\forall$ n

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-in\omega t}dt, \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

bildet. Evtl. für n=0 eine Fallunterscheidung betrachten!

Die Koeffizienten $a_n$ zu $\cos(n\omega t)$ und $b_n$ zu $\sin(n\omega t)$ ergeben sich dann zu

$$a_0 = 2c_0; \quad a_n = c_n + c_{-n}; \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Nützliche Formeln für die Integralberechnungen falls m,n $\in$ **N**:

$$\boxed{e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n}$$

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega x}dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad m \neq n \\ 1 & \text{für} \quad m = n \end{cases}}$$