

Übungsblatt 1

Aussagenlogik

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie die Richtigkeit der Äquivalenzen:

- a) De Morgan'sche Regel 1: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
- b) De Morgan'sche Regel 2: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
- c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$
- d) "Ausmultiplizieren 1": $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- e) "Ausmultiplizieren 2": $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

HINWEIS: Wahrheitstafeln.

Aufgabe 1.2

Vereinfachen Sie (mittels der Regeln aus Aufg. 1.1):

- a) $\overline{(p \Rightarrow q)} \vee q$
- b) $[(p \vee q) \wedge \overline{q}] \Rightarrow p$

Aufgabe 1.3

Negieren Sie folgende Aussagen korrekt!

- a) Claire ist in Kanada geboren oder ihr Vater ist nicht Europäer
- b) Die Zahl der positiven Teiler von 10 000 ist größer als 10 aber kleiner als 30
- c) $-1 \leq x \leq +3$
- d) $4 \leq x^2 \leq 9$
- e) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$.
- f) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$

Aufgabe 1.4 Widerspruchsbeweis

Beweisen Sie:

- a) Für jede positive reelle Zahl x gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- b) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\frac{n^3 + 2}{n^5 + n} > \frac{1}{n^2}$

Aufgabe 1.5 (+)

Beweisen Sie mithilfe des Schubfachprinzips: In jeder Menge von P Personen gibt es mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Personen kennen. (Wir nehmen an, dass "kennen" eine symmetrische Relation ist, d.h. aus "A kennt B" folgt "B kennt A")

Zahlssysteme, Gleichungen**Aufgabe 1.6 - entfällt -****Aufgabe 1.7 Darstellung reeller Zahlen**

Rechnen Sie die folgenden Zahlen in Brüche um: a) $10.\overline{814}$ b) $0.\overline{0009}$ c) $0.\overline{123}$

Aufgabe 1.8 Potenzen und Logarithmen

Suchen Sie einfachere Schreibweisen der folgenden Ausdrücke

$$a) T(a, b) = \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$b) T(a) = \frac{\sqrt[6]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \sqrt{a}}}$$

$$c) \ln(abc) + \ln b - \ln(b^3), \quad d) \log_b((ab)^c), \quad e) \log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} 3^{\sqrt[3]{3}}$$

Hinweis zu a), b): Bringen Sie auf die Form: $\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n}$

d) Ein Autounfall mit Fahrerflucht hat sich vergangene Nacht um circa 2^{00} zugetragen. Die Polizei hat den Flüchtigen am nächsten Morgen festnehmen können. Blutproben um 8^{00} , bzw 10^{00} ergaben Blutalkoholkonzentrationen von 0.50 bzw 0.35 Promille. Nach wiss. Befunden nimmt die Alkoholkonzentration im Blut nach dem Zeitgesetz $p(t) = a \cdot e^{\alpha t}$ ab. Ermitteln Sie aus den beiden Messungen a und α und berechnen Sie die mutmaßliche Alkoholkonzentration zum Tatzeitpunkt.

HINWEIS: Man stelle zwei Gleichungen auf!

Aufgabe 1.9 Lösen von Gleichungen

- a) Herr Meier befindet sich mit seinem Pkw auf der Autobahn zwischen Köln und Olpe. Wenn Herr Meier zwanzig Kilometer auf der Autobahn weiterfährt, ist er genauso weit entfernt von der Abfahrt Gummersbach, wie wenn er in die entgegengesetzte Richtung 5 km zurückfährt. Wie weit ist Herr Meier von der Ausfahrt entfernt? Man stelle eine Gleichung auf!
- b) Lösungsmenge bestimmen: $|x+1| + |x-1| = 4 \cdot |3-x|$

HINWEIS: Oft hilft eine Skizze für die Fallunterscheidung!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 13./14.10.09 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

- c) Es sei $a > 1$ ein beliebiger Parameter. Man bestimme für x die Lösungsmenge der Gleichung $|3x - a| + |2x + a| = 1$

- d) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ an:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-4x} - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} - \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2 - 4}$$

- e) Lösen Sie die Gleichung $0 = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-4x} - 1$ (Probe nicht vergessen!)

- f) Man gebe einen Wert x an, so daß y , def. durch $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, den Wert -0.5 annimmt!

- g) Man bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{5x^2 + x}{x^2 - 1} \leq 5$!

Aufgabe 1.10 Mengenschreibweisen

Stellen Sie folgende Teilmengen der reellen Zahlen (i) in der "Für-die-gilt-Schreibweise" und (ii) in der "**R** ohne" Schreibweise dar.

Bsp: Die Menge aller positiven reellen Zahlen ist (i) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ und (ii) $\mathbf{R} \setminus (-\infty, 0]$.

- (a) Zahlen, die größer 1 oder kleiner 0 sind, ausser 2 und -2
 (b) positive, aber nicht ganze Zahlen
 (c) Zahlen, die größer als 3, kleiner-gleich 5 sind oder die negativ, aber nicht -10 sind.

Aufgabe 1.11 Einfache Summen

- (a) Leiten Sie her: $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$

- (b) Berechnen Sie: $\sum_{i=1}^N (i+2)$

- (c) $\sum_{i=1}^{100} (i+2) \sum_{j=0}^{15} j$

- (d) $\sum_{i=1}^{100} i + 2 \sum_{j=0}^{15} j$

WICHTIGER HINWEIS: Ergebnisse, wenn möglich, in Maple kontrollieren!!!