

Übungsblatt 2

Summen und Folgen

Aufgabe 2.1 Rechnen mit Summen

a) Transformieren Sie den Index in $\sum_{k=6}^{12} \frac{1}{3+k}$ so, dass

(i) von $i = 1$ ab summiert wird,

(ii) über $\frac{1}{m}$ summiert wird.

b) Man berechne $\sum_{k=1}^{201} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=4}^{204} \frac{1}{k-2}$

c) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{150} (k+4)^3 - \sum_{k=5}^{20} (k-1)^3$, wenn $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ gilt.

Aufgabe 2.2 Doppelsummen

Berechnen Sie

a) $\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{10} (k-2) \cdot i$, b) $\sum_{k=1}^{10} \sum_{i=-5}^5 \ln(k) \cdot i$, c) $\sum_{k=2}^6 \sum_{i=0}^4 (ki - 2i + 3k - 6)$

d) $\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 \left[(k \cdot i)^{-2} + (k \cdot i)^{+2} \right]$

Aufgabe 2.3 Pascal'sches Dreieck

Stellen Sie das Pascal'sche Dreieck bis $n=6$ auf und berechnen Sie damit $(a-b)^6$.

Folgen

Aufgabe 2.4 Konvergenz und Grenzwerte von Folgen

a) – entfällt –

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte g der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n = \frac{5n+1}{1-2n}, \quad a_n = \left(2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right), \quad a_n = \left(\frac{2n-1}{5n+2} \right)^3$$

$$a_n = \frac{4 \cdot 10^{2n} - 9 \cdot 10^n}{4 \cdot 10^{n-1} - 20 \cdot 10^{2n-1}}$$

Bereiten Sie die Aufgaben für den 03./04.11.09 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

c) $a_n = n(\ln n - \ln(n+3))$ Hinweis: Benutzen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

d) $a_n = \frac{n^3 + 5n^2 + 3}{(2n+3) \cdot \binom{n}{2}}$

Aufgabe 2.5 Weitere Grenzwerte

Berechnen Sie den Grenzwert:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2}{1+3n} + \frac{n^2}{1-n} \right)$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{3}}{(n+3)n(n-1)} + \left(\frac{n^2}{1+n} + \frac{n^2}{1-n} \right) \right)$

(Hinweis: Aufgabe (b) ist original einer früheren Klausur entnommen)

Aufgabe 2.6 Fixpunkt-Iteration

Bestimmen Sie mittels Fixpunkt-Iteration¹ eine näherungsweise Lösung (auf 1 Nachkommastelle genau) der nachfolgenden **transzendenten Gleichungen**:

a) $x \ln x = 50$ b) $\ln x = \sqrt{x+1} - 5$ c) $\ln x = \sqrt{x^2 + 1}$

Machen Sie nach jedem Schritt die Einsetzprobe, bis die jeweiligen Gleichungen auf der rechten und linken Seite nicht mehr als ± 0.1 auseinander sind.

OPTION: Testen Sie (mit Excel oder Maple) *verschiedene* Arten aus, nach x aufzulösen. Was funktioniert, was nicht?

Aufgabe 2.7 Eulersche Zahl e (+)

Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ eine alternative Formel für die Eulersche Zahl

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist!

HINWEIS: Binomischer Satz.

Testen Sie (mit Excel oder Maple) aus: Welche der beiden Formeln konvergiert schneller?

¹ Bringen Sie also die Gleichung in eine Form $x = g(x)$ (*mehrere* Möglichkeiten!), wählen Sie einen (oder verschiedene) Startwerte x_0 und bilden Sie die rekursive Folge $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, $x_3 = \dots$

Aufgabe 2.8 O()-Notation und Laufzeitverhalten

Wir haben verschiedene Algorithmen, deren Laufzeitverhalten $L(n)$ und deren konkrete Laufzeit für $n=10$ bekannt sei. (Wir nehmen an, dass in " $O(X)$ " andere Terme als der führende Term vernachlässigbar seien.)

Laufzeit $L(n)$	$n=2$	$n=10$	$n=1.000$	$n=100.000$	relative Steigerung Problemgröße zu $n=1.000$ bei 100x schnellerem Rechner
$O(\lg(n))$		$10\mu s$			
$O(n)$		$10\mu s$			
$O(n \lg(n))$		$10\mu s$			
$O(n^2)$		$10\mu s$			
$O(2^n)$		$10\mu s$			

Füllen Sie den Rest der Tabelle aus!

Anmerkungen / Hinweise:

- o Wenn die Zahlen in μs zu groß werden, wechseln Sie auf Sekunden, Stunden oder Jahre.
- o Zur letzten Spalte "relative Steigerung": Mit unserem alten Rechner berechnen wir ein Problem der Größe $n=1000$ in der Zeit T . Nun bekommen wir einen Rechner NEU, der 100x schneller ist. Die Frage ist: An welcher Problemgröße n_{NEU} hätte der alte Rechner die Zeit $100 \cdot T$ zu arbeiten? Das ist es, was der neue Rechner in Zeit T schafft. Wenn z.B. $n_{NEU}=5700$ herauskäme, dann wäre die relative Steigerung $r=5700/1000 = 5.7$. Rechnen Sie dieses r für jede Zeile aus!

Die schwierigste Zeile hierbei ist Zeile 3. Zeigen Sie, dass man auf eine Gleichung der Form

$$r = \frac{300}{\lg(r) + 3} \text{ kommt. Lösen Sie diese Gleichung näherungsweise durch Fixpunkt-Iteration!}$$

(noch) Zahlssysteme**Aufgabe 2.9 Modulare Arithmetik / Prüfwziffern**

- a) Berechnen Sie möglichst effizient und **ohne** Taschenrechner
 - (i) $(101 \cdot 234) \bmod 5$
 - (ii) $(38 + 22 \cdot 17) \bmod 4$
 - (iii) $(6 + 27 \cdot 8^{1000}) \bmod 7$
 - (iv) $(2^{50} + 38) \bmod 4$
 - (v) $(2^{50} + 38) \bmod 7$
- b) Zeigen Sie, dass 0-8176-4176-9 eine gültige ISBN ist.
- c) Ein Einzelfehler passiert an der zweiten Stelle, und es wird daher die ISBN 0-1176-4176-9 eingegeben. Wird der Fehler erkannt?
- d) Jetzt passiert noch ein weiterer Fehler an der dritten Stelle, 0-1x76-4176-9 wird eingegeben. Für welche Ziffern x wird **kein** Fehler festgestellt?