

Übungsblatt 5 : Lineare Algebra

Aufgabe 5.1

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Komponenten von

$$\vec{u} - \vec{v}, \quad 6\vec{u} + 2\vec{w}, \quad -\vec{v} + \vec{u}, \quad (2\vec{u} - 7\vec{w}) - (8\vec{w} + \vec{v})$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{x} = 7\vec{x} + \vec{w}$

Aufgabe 5.2

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

(a) $4\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{x}$

(b) $\vec{v} \times \vec{w} + 2\vec{w}$

(c) $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w}$

Aufgabe 5.3

Machen Sie sich noch einmal klar, was eine **Basis** eines n-dimensionalen Vektorraums ist. So ist zum Beispiel für $n=3$ jede Menge von drei linear unabhängigen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor lässt sich aus diesen Basisvektoren **linear kombinieren**. Falls es sich bei den Basisvektoren um die Einheitsvektoren handelt, sind die Koordinaten des Vektors genau die Linearfaktoren aus der Linearkombination. Wenn nun eine andere Basis gegeben ist (also nicht die Einheitsvektoren), so kann man bezüglich dieser anderen Basis ebenso die Linearfaktoren der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors **bezüglich dieser Basis** nehmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Basis } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ und die Matrix M:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

- (a) den von $(\vec{a}, \vec{b})$, bzw von $(\vec{b}, \vec{c})$, eingeschlossenen Winkel,
- (b) die von $(\vec{a}, \vec{b})$, bzw von $(\vec{b}, \vec{c})$, aufgespannte Fläche (Parallelogramm),
- (c) einen Normalenvektor $\vec{n}$ der durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene,

Aufgabe 5.5

Gegeben seien die Punkte $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aus 5.4 sowie die weiteren Punkte

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Stellen Sie die Gleichungen auf für die Ebene E_1 , die durch $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ geht; für die Ebene E_2 , die durch $\vec{f}, \vec{g}, \vec{a}$ geht; für die Gerade g, die durch $\vec{f}, \vec{g}$ geht.
- (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt P von E_1 und g.
- (c) Bestimmen Sie die Schnittgerade s von E_1 und E_2 .

Aufgabe 5.6

$$\text{Mit } E_3 = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ sei eine weitere Ebene in}$$

Punkt-Richtungsform gegeben, neben der Ebene E_1 aus 5.5.

- (a) Rechnen Sie die Ebenen E_1 und E_3 in die Hessesche Normalform und in die Koordinatenform um. Rechnen Sie zur Probe die Koordinatenform wieder in die Punkt-Richtungsform zurück.
- (b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{c}$ aus 5.4 zur Ebene E_1 .

Aufgabe 5.7

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche Produkte der Matrizenmultiplikation von zwei Matrizen sind definiert? Führen Sie dann die Multiplikation durch.

Aufgabe 5.8

Eine Firma verarbeite die Rohstoffe R1, R2, R3. Der wöchentliche Verbrauch der Rohstoffe während eines Monats ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Woche/Rohstoff	R1	R2	R3
1.Woche	8	4	12
2.Woche	10	6	5
3.Woche	7	8	5
4.Woche	11	7	9

Diese Rohstoffe sollen einem von zwei Lieferanten L1, L2 bezogen werden, wobei die Rohstoffpreise in folgender Tabelle angegeben sind (in virtuellen Geldeinheiten pro Mengeneinheit)

Rohstoff/Lieferant	L1	L2
R1	8	4
R2	10	6
R3	7	8

Vergleichen Sie die Rohstoffkosten für alle vier Wochen und entscheiden Sie, bei welchem Lieferanten die Firma bestellen soll.

Aufgabe 5.9

Ein Betrieb stellt aus drei Rohstoffen R1, R2, R3 in der ersten Produktionsstufe die drei Zwischenprodukte Z1, Z2, Z3 her. In der zweiten Stufe werden hieraus die vier Endprodukte E1, E2, E3, E4 gefertigt. Der Materialverbrauch beider Produktionsstufen beträgt:

$$M_1 = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} Z1 & Z2 & Z3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad M_2 = \begin{matrix} & \begin{pmatrix} E1 & E2 & E3 & E4 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Berechnen Sie die Matrix, die für jede Einheit eines Endprodukts den Rohstoffverbrauch angibt
- b) Welche Rohstoffmengen werden benötigt, wenn die folgenden Endproduktmengen

hergestellt werden: $P = \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5.10

Die folgenden linearen Gleichungssysteme besitzen eine eindeutige Lösung. Bestimmen Sie diese durch Anwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** wie in der Vorlesung besprochen, d.h. Sie berechnen die Lösung durch Übergang zur erweiterten Koeffizientenmatrix.

a)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 17 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -9\end{aligned}$$

Aufgabe 5.11

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus**:

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6\end{aligned}$$

Aufgabe 5.12

Berechnen Sie unter Verwendung des **Gauß'schen Lösungsalgorithmus** die Gleichung der **Parabel 2. Ordnung**

$$y = ax^2 + bx + c$$

die durch die Punkte A(-1;4) , B(-2;-8) und C(3;2) verläuft.

Aufgabe 5.13

a) Berechnen Sie folgende Determinanten nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Determinanten (Tipp: bei Bedarf erst geschickt umformen):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c+1 \end{vmatrix}$$

c) Berechnen Sie die folgende Determinante, nehmen Sie dazu zunächst einige geschickte Umformungen vor:

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 & -2 & 3 \\ -9 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5.14

Berechnen Sie die folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

Dazu können Sie

- sich ausgiebig im Bruchrechnen üben, indem Sie direkt beginnen, nach einer Zeile bzw. einer Spalte zu entwickeln ☺
- sich mit den möglichen elementaren Umformungsmöglichkeiten von Determinanten und den Auswirkungen dieser vertraut machen (siehe Vorlesung), diese gezielt einsetzen und dann bequem die Determinante berechnen.

Aufgabe 5.15

Berechnen Sie die $t \in \mathbb{R}$, für die folgende Determinante den Wert Null annimmt:

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix}$$