

3. Zahlenfolgen

3.1. Wozu InformatikerInnen Folgen brauchen

- Konvergenz von Folgen ist die Grundlage der Analysis (Differential- und Integralrechnung)
- Transzendente Gleichungen wie $x \ln x = 50$ kann man näherungsweise über Folgen lösen (**Fixpunkt-Iteration**)
- Jede **Simulation** im Computer zerlegt die Zeit in kleine Schritte und berechnet somit Folgen $f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots \gg$ [WPF Spiele, Simulation und Dynamische Systeme](#).
- Laufzeit von Algorithmen, Worst-case-Abschätzung durch obere Abschätzung zu bekannten Folgen. Oftmals schreibt man ein Programm und kann es für kleine Mengen (z.B. $n=10$) austesten, aber in der Praxis wird es mit viel größeren Mengen (z.B. $n=1.000.000$) laufen. Wie ist das Verhalten im Grenzwert großer Zahlen? Dies führt auf Folgen und die **Landausche $O()$ -Notation**.



Erstes **Beispiel**: Für dieselbe Aufgabe braucht ein Algorithmus A $100n + n^2$ Schritte, ein Algorithmus B braucht $3n^2 - 5$ Schritte. Welcher Algorithmus ist für große n schneller?

Zweites **Beispiel**: Ein Mitarbeiter Ihrer Abteilung hat herausgefunden, dass es für ein bestimmtes Optimierungsproblem zwei mögliche Algorithmen gibt, deren Laufzeit in Abhängigkeit von der Problemgröße n wie folgt skaliert:

$$\text{Algorithmus C: } C_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50} + 40$$

$$\text{Algorithmus D: } D_n = \frac{(n+1)!n}{(n-1)!(n+1)^2} + 1000$$

Welchen Algorithmus nehmen Sie, wenn Sie für sehr große n schneller sein wollen?

Die Sache ist schwierig zu überblicken, wie löst man Aufgaben dieser Art systematisch?

Lösung in Vorlesung (am Ende des Kapitels 3)

3.2. Definition und Eigenschaften von Folgen

Wir hatten ja bereits zur Definition reeller Zahlen den Begriff der Zahlenfolge benötigt. In diesem Kapitel soll der Begriff weiter vertieft werden.

Def D3-1: Zahlenfolge

Unter einer (unendlichen) Zahlenfolge versteht man eine eindeutige Abbildung der Menge $\mathbf{N}$ der natürlichen Zahlen auf einen Zahlenbereich. $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$

Die Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ heißen Glieder der Folge, a_n ist das n -te Glied.

Beispiel:

$$1.) a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \quad (\text{Bem.: } a_n \rightarrow 0)$$

Weitere Beispiele in Vorlesung

Def D3-2: Monotonie von Folgen

Eine Folge heißt:

monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$

streng monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$

monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$

streng monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$

Def D3-3: Beschränktheit von Folgen

Sei $n \in \mathbf{N}$. Eine Folge heißt:

nach oben beschränkt, falls ein $K \in \mathbf{R}$ existiert, so daß für alle n gilt: $a_n \leq K$

nach unten beschränkt, falls ein $k \in \mathbf{R}$ existiert, so daß für alle n gilt: $a_n \geq k$

beschränkt, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiele:

$$1.) a_n = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5},$$

Die Folge ist streng monoton wachsend und beschränkt, z.B. $k = 0$, $K = 1$.

$$2.) a_n = \frac{n}{2^n}, n \in \mathbf{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16},$$

Die Folge ist monoton fallend und beschränkt, z.B. $k = 0$, $K = 1$.

3.3. Grenzwert einer Zahlenfolge

Einführungsbeispiel $(a_n) = (1 - \frac{1}{n})$ in Vorlesung

Def D3-4: Grenzwert einer Folge

g heißt Grenzwert (Limes) der Folge (a_n) , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Existiert der Grenzwert einer Folge, dann heißt die Folge **konvergent**. Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

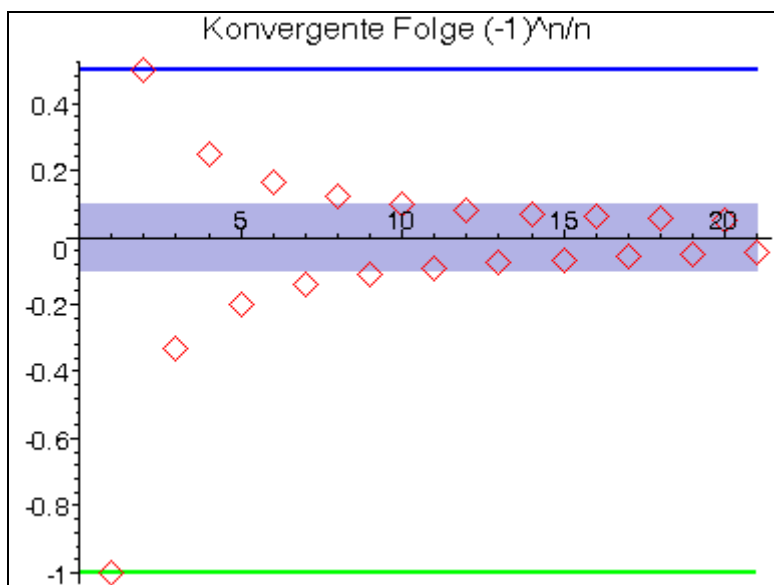
Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

Anschaulich: Gibt es einen " ε -Schlauch", in dem schließlich alle Folgenglieder liegen?

BEACHTET: Grenzwert und (obere/untere) Schranke sind nicht dasselbe!! Die Folge

$$(a_n) = (-1)^n/n, \quad n=1,2,3,\dots$$

hat die untere Schranke -1, die obere Schranke +1/2 und den Grenzwert 0:

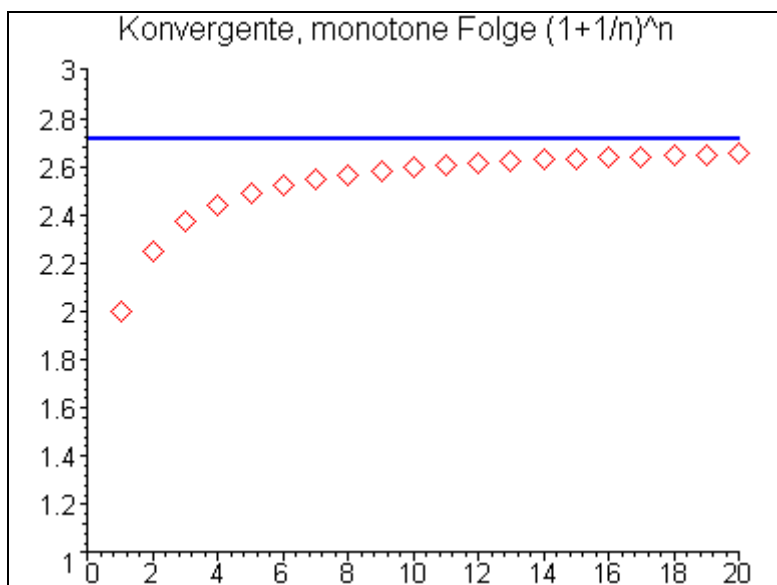


Es gilt:

Satz S3-1 Eine konvergente Folge ist beschränkt.

nur muss eben der Grenzwert nicht mit oberer/unterer Schranke zusammenfallen.

Wenn allerdings die Folge monoton wachsend ist, dann stellt ein Grenzwert auch eine obere Schranke dar:



(Dass diese Folge monoton ist, ist nicht selbstverständlich, wir werden es weiter unten zeigen)

Die logische Umkehrung des Satzes ist manchmal auch nützlich:

Satz S3-2 Eine unbeschränkte Folge ist divergent.

Beispiele für Grenzwerte:

1.) $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

d.h. $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ "Nullfolge"

Beweis in Vorlesung

2.) $a_n = \frac{2n-1}{3n}, n \in \mathbb{N}$

d.h. $(a_n) = \frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

3.) $a_n = 1 - (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

d.h. $(a_n) = 0, 2, 0, 2, \dots$

$\Rightarrow (a_n)$ ist divergent

BEACHTEN: Nicht jede divergente Folge ist auch unbeschränkt (!!)

$$4.) a_n = n^2 + 5, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{d.h. } (a_n) = 6, 9, 14, \dots$$

(a_n) ist nach **Satz S3-2** divergent, weil (a_n) nicht beschränkt ist. Man sagt dann, (a_n) besitzt den **uneigentlichen Grenzwert** ∞ oder $-\infty$, bzw. die Folge geht gegen ∞ oder $-\infty$. (a_n) ist **bestimmt-divergent**. Schreibweise:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$5.) \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \infty \text{ falls } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ falls } \alpha > 0$$

Beweis folgt weiter unten mit **Satz S3-4** d),e).

$$6.) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases} \quad \text{"geometrische Folge"}$$

Beweis s. [Stingl, S. 91]

Satz S 3-3 Fundamentale Nullfolgen
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ für } q < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0$

Aus den elementaren Folgen lassen sich durch folgende Rechengesetze auch die Grenzwerte anderer Folgen berechnen:

Satz S3-4 Rechengesetze für Grenzwerte
Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n), \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ für $(b_n \neq 0, b \neq 0)$ und $(a_n)^r$ für $r \in \mathbb{R}$ konvergent, und es gilt: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = ca$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^r = a^r$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} (r^{a_n}) = r^a \quad (\text{für } r > 0)$$

Rechentechisch: Man kann den Limes in aller Regel auf die Einzelterme "durchziehen".

Die Regeln von **Satz S3-4** sind auch nutzbar, wenn Folgen a_n oder b_n gegen $\pm\infty$ "konvergieren", wenn man folgende Regeln verwendet

Satz S 3-5

$c \pm \infty = \pm\infty$	$\infty + \infty = \infty$	$\frac{c}{\pm\infty} = 0$	$(\infty)^c = \infty$
$\pm\infty \cdot c = \pm\infty \quad (c > 0)$	$\pm\infty \cdot \infty = \pm\infty$		$(c > 0)$

Dies ist so zu verstehen: Eine Folge, die gegen c konvergiert, plus eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht, ergeben eine Folge, die bestimmt divergent gegen ∞ geht.

Dagegen sind nachfolgende Ausdrücke "**unentscheidbar**", d.h. ohne weitere Untersuchung kann NICHTS ausgesagt werden:

$0 \cdot \infty = ?$	$\infty - \infty = ?$	$\frac{0}{0} = ?$	$\frac{\infty}{\infty} = ?$
----------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------------

Dann muss man durch geeignete Umformungen versuchen, zu einer entscheidbaren Situation zu kommen.

In Vorlesung werden Folgerungen aus **Satz S3-4** und **Satz S 3-5** gezeigt.

Regeln für die Berechnung von Grenzwerten:

- Komplizierte Ausdrücke auf Summe / Produkt / Quotient bekannter Folgen (meist Nullfolgen) zurückführen. D.h. wenn möglich, den Limes "nach innen ziehen".
- Bei Brüchen durch die größte Potenz **im Nenner** dividieren (**g.P.i.N.**).
- Wenn eine Summe von Termen die Situation $\infty - \infty$ ergibt, dann schauen, ob eine Zusammenfassung (z.B. auf gemeinsamen Hauptnenner) Klärung bringt.
- Schreibweise: Für $\lim_{n \rightarrow \infty} (7n^2 - 1) = \infty$ findet man auch die "Pfeildarstellung"

$$(7n^2 - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Wann ist "nach innen ziehen" für Limes NICHT möglich? – Wenn dadurch eine "unentscheidbare" Situation (s. gelbe Tabelle nach Satz S 3-5) entsteht. Dann muss man versuchen, erst anderweitig zu vereinfachen.

Beispiele:

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 4n - 5}{8n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}}{8 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{n}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{5}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (8) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3}{n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{7}{n^2})} = \frac{-2 + 0 - 0}{8 - 0 + 0} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Hier haben wir zuerst „g.P.i.N.“ benutzt, damit konstante Folgen oder Nullfolgen entstehen und wir so den Limes nach innen ziehen dürfen.



Zur Übung:

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2 - 1}{3n^2 + 2} \right)^2 \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right)$$

$$4) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}}$$

Regel: Bei Grenzwert-Betrachtung sind bei Summen die Terme niedriger Ordnung unwichtig.

Ein Kriterium für die Existenz von Grenzwerten liefert der folgende Satz:

Satz S 3-6 von Bolzano-Weierstrass

Eine monoton wachsende Folge, die nach oben beschränkt ist, ist konvergent.

Eine monoton fallende Folge, die nach unten beschränkt ist, ist konvergent.

WICHTIGER Satz! Damit wird klar, dass die reellen Zahlen, die ja als Grenzwerte von Dezimalbruch-Folgen definiert sind (s. **Def D 2-10**), eindeutig sind, d.h. der Grenzwert existiert:

N	1	2	3	4	5	6	...
A	1	1.4	1.41	1.414	1.4142	1.41421	... → $\sqrt{2}$

Weitere Beispiele in Vorlesung:

1) Die Folge $\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$ ist konvergent. Der Grenzwert heißt **e (Eulersche Zahl)**.

2) **Rekursive Folge** $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right)$ (sog. **Fixpunkt-Iteration**).

Die **Fixpunkt-Iteration** ist eine "quick-&-dirty"-Methode, um von nicht einfach lösbaren Gleichungen (sog. *transzendenten* Gleichungen) eine Lösung zu bestimmen:

1. Man bringt die Gleichung in die Form $a = f(a)$.
(Hierfür gibt es oft zahlreiche Möglichkeiten, und man muss probieren, welche Lösung zum Ziel führt)
2. Jetzt startet man mit einem Wert a_1 und bestimmt $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, ... usw.
3. Wenn die Folge (a_n) einen Grenzwert a besitzt, dann ist a eine Lösung der transzendenten Gleichung.

3.3.1. Landausche $O()$ -Notation

[Hachenberger05, S. 383-387]²

In der Informatik muss man oft die Laufzeit von Algorithmen abschätzen. Beispiel Matrixmultiplikation: Man braucht n^3 Multiplikationen und $n^2(n-1)$ Additionen, also insgesamt

$$a_n = 2n^3 - n^2$$

Operationen. Wie wächst die Laufzeit, wenn die Matrixgröße n (Zeilenzahl) steigt? Oft interessiert man sich für das Grenzwertverhalten großer n , und hier ist n^3 der dominante Term :

Def D3-5: Landausche $O()$ -Notation

Sei $B=(b_n)$, $b_n \neq 0$ eine Folge. Wir definieren die Menge "**Groß-O**" von B durch

$$O(B) = O(b_n) = \{ \text{Folge } A=(a_n) \mid \text{Der Quotient } \frac{a_n}{b_n} \text{ ist beschränkt} \}.$$

Man sagt dann: Die Folge A ist "**von der Ordnung $O(B)$** ", als Formel: $A \in O(B)$.

Für $A \in O(B)$ schreibt man üblicherweise (wenn auch ungenau) $A = O(B)$.

Beispiele:

$$1. \quad 2n^3 - n^2 \in O(n^3), \text{ denn } \frac{2n^3 - n^2}{n^3} = 2 - \frac{1}{n} \rightarrow 2 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$2. \quad n + 2 \in O(n), \text{ aber auch } n + 2 \in O(n^2) \text{ oder } n + 2 \in O(4n).$$

$$3. \quad 6n \log n + 270n + 4 \in O(n \log n)$$

WARNUNG: Das Gleichheitszeichen in Aussagen mit der $O()$ -Notation ist NICHT das Gleichheitszeichen der Arithmetik, sondern nur eine (ungenau)e Abkürzung für " $\in O(B)$ ". Denn aus $A=O(B)$ und $C=O(B)$ folgt NICHT $A=B$ und NICHT $A=C$. Mit der $O()$ -Notation drückt man aus, dass die Folgen A , B und C für **große n** zur selben Wachstumsklasse (Menge) gehören.

² [Hartmann04, S. 245-249] bringt die $O()$ -Notation auch, allerdings Schreibweise etwas unpräzise.

Eine weitere ungenaue Schreibweise: $a_n = 2n^3 + O(n^2)$ für den Sachverhalt

$a_n - 2n^3 \in O(n^2)$, d.h. der führende Term ist $2n^3$, die nachfolgenden Terme gehören zur Wachstumsklasse $O(n^2)$.



Übung:

- (a) Ordnen Sie den Folgen ein möglichst einfaches und "billiges" $O(B)$ zu.
 (b) Schreiben Sie die Folgen in der Form "führender Term + $O(B)$ ".

Folge	(a)	(b)
$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$	$2n^3 + O(n^2)$
$7n^5 + 26n^6$		
$n + 3n^2 - 2n \log(n)$		
$\frac{n^3}{(n+1)^2}$		

In Vorlesung oder Übung: Tabelle mit Vergleich verschiedener Laufzeitverhalten, weiteres Bsp. zu **Fixpunkt-Iteration**.



Übung: Lösen Sie die Aufgaben aus den Eingangsbeispielen und entscheiden Sie für die Fälle 1, 2 und 3: Welcher Algorithmus ist jeweils für große n schneller?

	Erster Algorithmus	Zweiter Algorithmus
Fall 1	$A_n = 100n + n^2$	$B_n = 3n^2 - 5$
Fall 2	$A'_n = 100n + \frac{n^2}{10!}$	$B'_n = \frac{3n^2 - 5}{10!}$
Fall 3	$C_n = \frac{100n^2 - 650n + 40}{2n + 50} + 40$	$D_n = \frac{(n+1)!n}{(n-1)!(n+1)^2} + 1000$

Schreiben Sie alle Folgen in der Form " $X_n = \text{führender Term} + O(Y)$ "

3.4. Fazit zu Folgen

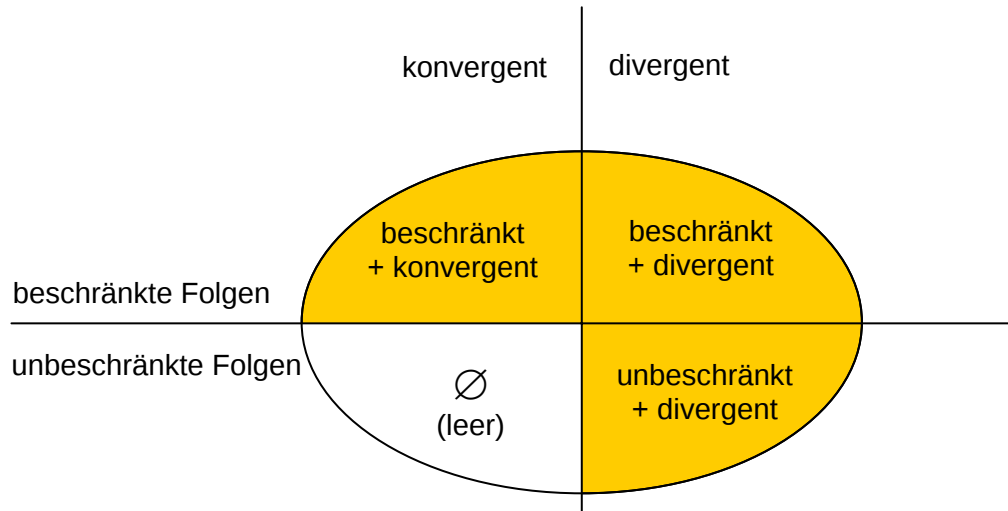
Wir haben in diesem Kapitel folgende Begriffe kennengelernt:

- Grenzwert: wenn schließlich alle Folgenglieder in einem " ε -Schlauch" liegen
- konvergente Folge: hat ein endliche Zahl als Grenzwert (Limes)
- divergente Folge: das Gegenteil
- bestimmt-divergente Folge: hat $+\infty$ oder $-\infty$ als Grenzwert (uneigentlicher G.)

Wichtiges Resultat:

- Mit Grenzwerten kann man rechnen: Operator $\lim_{n \rightarrow \infty}$ vertauschbar mit den meisten Grundrechenoperationen.

Wir können folgende Systematik für Folgen erstellen:



Nachfolgend Ü-Fragen: jeweils DEM NACHBARN ERKLÄREN:

- Übung: Geben Sie für jeden der 3 möglichen Quadranten ein Beispiel an!
- Übung: Wahr oder falsch? (Begründen Sie Ihre Antwort):
 - o Jede bestimmt-divergente Folge ist divergent.
 - o Jede divergente Folge ist bestimmt-divergent.

Eine Folge ist entweder konvergent oder sie strebt gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$.

