

7. Integralrechnung

"Sinus minus Integral, Cosinus hilft allemal ..."
[Studiosus Anonymus]

7.1. Warum Informatiker Integralrechnung brauchen

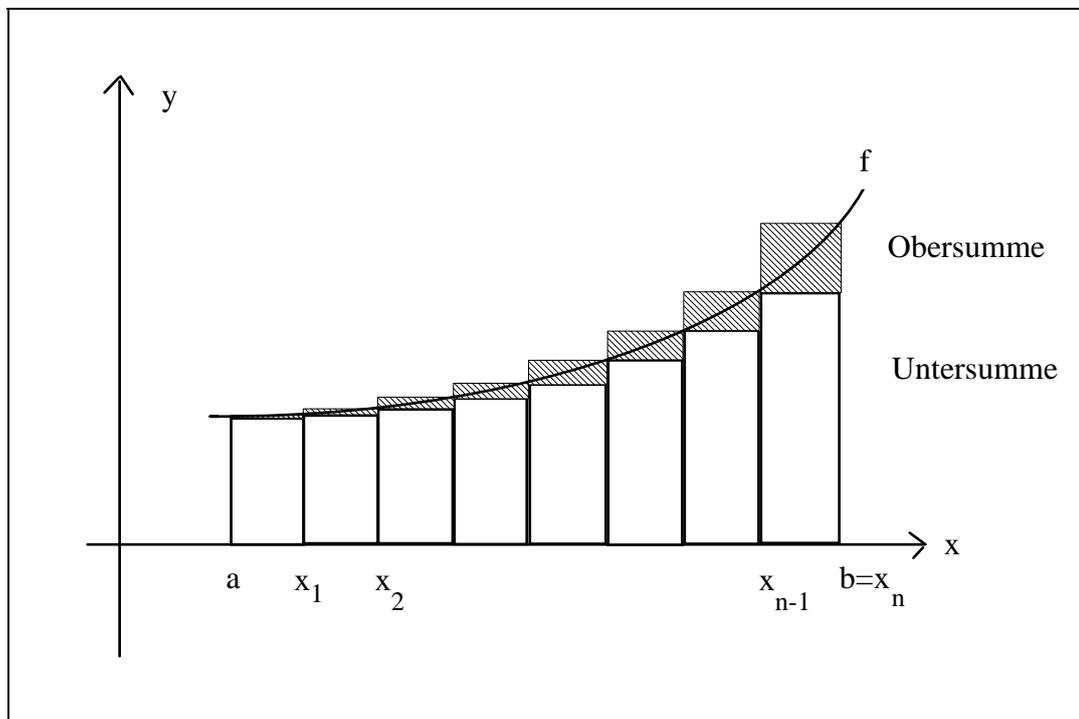
Die Integration ist als Umkehrung der Differentiation aus sich selbst heraus wichtig zur Komplettierung des "mathematischen Gebäudes". Darüber hinaus: Mit Integralen kann man

- die Fläche unter beliebig geformten Kurven finden (die "normale" Geometrie "kann" nur einfache Polygone)
- die Volumina beliebiger Körper berechnen
- Differentialgleichungen lösen >> [WPF Spiele, Simulation + dynamische Systeme](#)
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen rechnen (s. Kap. 7.6 und Mathe 2)

Dies alles braucht der Informatiker in der Computergrafik, bei der Simulation von dynamischen Systemen auf dem Computer, in der Wirtschaftsinformatik (kumulierte Kosten, kumulierte Wahrscheinlichkeiten) u.v.a.m.

7.2. Das bestimmte Integral

Wir stellen uns die Aufgabe, den Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse zu berechnen:



Wir nehmen eine Zerlegung $Z_k = \{x_0, \dots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b, \quad x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$$

vor. Dabei definiert man als Feinheitsmaß der Zerlegung: $d(Z_k) = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$

Der gesuchte Flächeninhalt A liegt zwischen Untersumme U_n und Obersumme O_n mit:

$$U(Z_n) = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k$$

$$O(Z_n) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

$$U(Z_n) \leq A \leq O(Z_n)$$

Mit $d(Z_n) \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ gilt hoffentlich:

$$\lim_{d(Z_n) \rightarrow 0} U(Z_n) = \lim_{d(Z_n) \rightarrow 0} O(Z_n) = A$$

Man schreibt symbolisch für diesen Grenzwert, der unabhängig von der Zerlegung ist:

$$\lim_{d(Z_n) \rightarrow 0} U(Z_n) = \lim_{d(Z_n) \rightarrow 0} O(Z_n) = \int_a^b f(x) dx$$

Def D 7-1: Bestimmtes Integral, Integrierbarkeit

Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ heißt, falls er existiert, das **bestimmte (Riemann-**

sche) Integral der Funktion f in den Grenzen a und b und wird durch $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet. $f(x)$ heißt **Integrand**, a, b : **Integrationsgrenzen**, x : **Integrationsvariable**. Eine Funktion $f(x)$, für die dieser Grenzwert existiert, heißt in $[a, b]$ **integrierbar**.

Satz S 7-1 Wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist Integral $\int_a^b f(x) dx$ die Fläche unterhalb von $f(x)$ bis zur x -Achse.

Dieser Satz ergibt sich aus obigem Bild und der Herleitung. Weiter folgert man:

- Wenn $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist Integral $\int_a^b (-f(x)) dx$ eine Fläche oberhalb der x -Achse. Anders ausgedrückt: **Flächen unterhalb der x -Achse zählen negativ**.

Mit diesem Wissen können wir einige bestimmte Integrale berechnen:

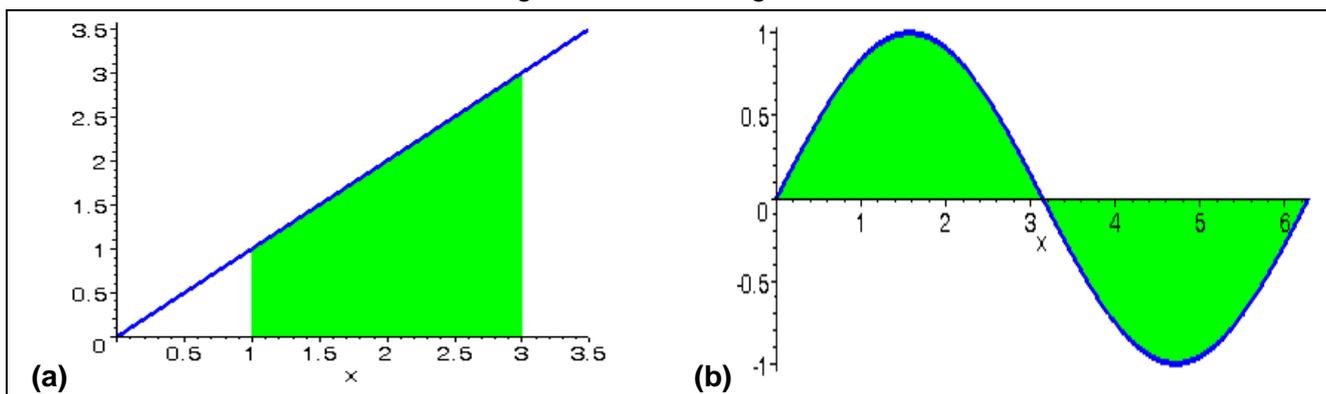


Abbildung 7-1: Geometrisch berechenbare Integrale

Für Abbildung 7-1(a) gilt mit Dreiecksformel $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$, also $\int_1^3 x dx = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

Für Abbildung 7-1(b) gilt wg. der obigen Folgerung, dass sich die positive und die negative Fläche wegheben, also $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = 0$.

Andere Integrale geben größere Rätsel auf:

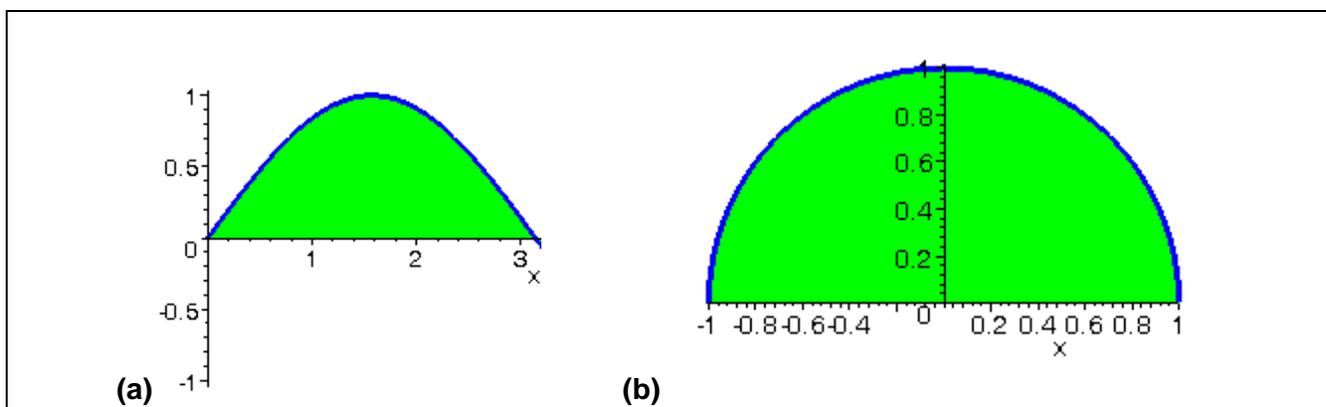


Abbildung 7-2: Weitere Integrale

Zu Abbildung 7-2(a): Was ist $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$?

Zu Abbildung 7-2(b): Gilt wirklich, dass $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ ist, weil der ganze Einheitskreis die Fläche $\pi \cdot 1^2 = \pi$ hat? Wie rechnet man das?

Bevor wir uns diesen Fragen zuwenden, notieren wir noch einige Eigenschaften des bestimmten Integrals, die man sich an entsprechenden Flächen-Bildern leicht klarmachen kann:

$$1. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (\text{Intervalladditivität})$$

2. **Linearität** (Faktorregel und Summenregel):

$$c_1 \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (c_1 f(x))dx \quad \text{und} \quad \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) + g(x))dx$$

3. **Mittelwertsatz der Integralrechnung:** Wenn f auf $[a,b]$ stetig ist, dann gibt es ein

$$y \in [a,b] \text{ mit } \int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(y)$$

7.3. Stammfunktion

Bisher hatten wir eine Funktion $y = f(x)$ gegeben und suchten die Ableitung $y' = f'(x)$.

Häufig liegt jedoch die umgekehrte Situation vor. Gegeben ist eine Funktion f . Finde diejenige Funktion F , deren Ableitung gerade die vorgegebene Funktion f ist.

Def D 7-2: Stammfunktion

Jede differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ heißt eine **Stammfunktion** zu f .

Satz S 7-2 Sind F und G zwei Stammfunktionen zu f , so ist $F(x) = G(x) + C$.
Zwei beliebige Stammfunktionen zu f unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

Beispiel:

$$f(x) = \sin x, \quad F(x) = -\cos x + C$$

$$\text{denn: } F'(x) = (-\cos x + C)' = \sin x$$

Def D 7-3: Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen von f nennt man **unbestimmtes Integral** und schreibt

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Wiederum heißt $f(x)$ **Integrand**, und x **Integrationsvariable** (vgl. Def D 7-1). Zusätzlich heißt C **Integrationskonstante**.

Die Schreibweise ist nicht ganz sauber, weil es ja eine (unendliche) Menge von Stammfunktionen gibt. Eigentlich müßte man schreiben:

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

aber dies ist für den "praktischen Alltag" zu langwierig

Wir stellen uns nun die Frage, wie wir die Integrale aus Abbildung 7-2 lösen, die wir bisher noch nicht "können". Die Rettung naht in Form des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: Integrale lassen sich systematisch mittels Stammfunktionen berechnen:

7.4. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz S 7-3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist f stetig auf $[a, b]$, und ist F irgendeine Stammfunktion zu f , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Für $F(b) - F(a)$ schreibt man auch $F(x) \Big|_a^b$

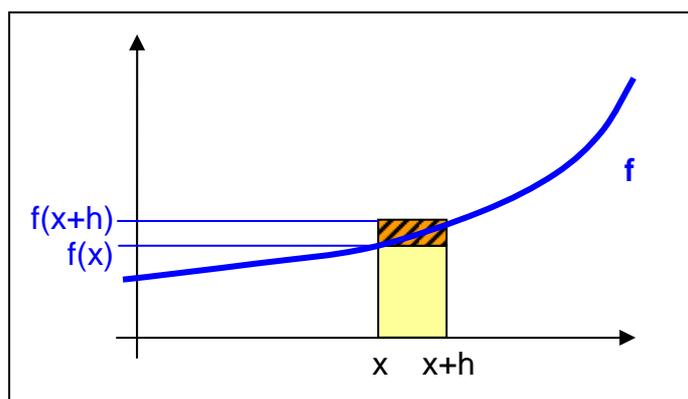
Dieser Satz ist bedeutsam, weil er zwei ganz verschiedene Konzepte, nämlich die Riemannsche Integralsumme (die hinter dem bestimmten Integral steckt) und die Stammfunktion verknüpft.

Zum Beweis von **Satz S 7-3** machen wir im bestimmten Integral die obere Grenze variabel:

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Diese Funktion $I(x)$ ist eine Stammfunktion von f (!!) Denn:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = ?$$



$$f(x)h \leq I(x+h) - I(x) \leq f(x+h)h$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{I(x+h) - I(x)}{h} \leq f(x+h)$$

Mit $h \rightarrow 0$ und der Stetigkeit von f gilt:

$$f(x) \leq l'(x) \leq f(x)$$

$$\Rightarrow l'(x) = f(x)$$

d.h. $l(x)$ ist eine Stammfunktion zu f , q.e.d.

Haben wir nun mit $F(x)$ *irgendeine* Stammfunktion zu f , dann muss nach **Satz S 7-2** gelten

$$l(x) = F(x) + C = F(x) - F(a)$$

(die letzte Umformung deshalb, weil $l(a) = 0$ sein muss). Das bestimmte Integral ist somit

$$\int_a^b f(x) dx = l(b) = F(b) - F(a)$$

q.e.d. ■

Tabelle einiger unbestimmter Integrale (Stammfunktionen):

(Nachweis jeweils durch Differenzieren der rechten Seite)

| | |
|----|---|
| 1. | $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$ |
| 2. | $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad x > 0$ |
| 3. | $\int e^x dx = e^x + C$ |
| 4. | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad a > 0$ |
| 5. | $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 6. | $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 7. | $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ |
| 8. | $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ |
| 9. | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ |

Berechnungsbeispiele:

$$\text{a) } \int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx$$

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + 5x + C$$

Wir nehmen die Stammfunktion mit $C = 0$:

$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + 5x \right]_1^2 = \left(4 - \frac{16}{3} + 10 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 5 \right) = \frac{49}{12}$$

$$\text{b) } \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2$$



Übung: Berechnen Sie nach dem gleichen Prinzip: $\int_1^8 \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{x^2} dx$

7.5. Integrationsregeln

Wir werden in diesem Abschnitt einige Methoden bereitstellen, mit denen man in bestimmten Fällen Stammfunktionen ermitteln kann. Es gibt jedoch keine allgemeingültigen Verfahren zur Bestimmung einer Stammfunktion. Vielmehr gibt es erstaunlich einfach aussehende Integranden, für die keine Stammfunktionen (als Kombinationen üblicher Funktionen) angebar sind. Beispiele dafür sind:

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{x}{\ln x} dx, \int e^{x^2} dx, \int \sin x^2 dx \text{ etc.}$$

WICHTIG: Integrieren kann schwierig sein, aber der Check, ob das Ergebnis stimmt, ist immer einfach (>> differenzieren). Also: **Immer die Probe machen!**

Im Folgenden seien die Funktionen f und g alle integrierbar.

Satz S 7-4 Summenregel

Für a, b, p, q aus \mathbb{R} gilt:

$$\int_a^b (pf(x) + qg(x)) dx = p \int_a^b f(x) dx + q \int_a^b g(x) dx$$

Anmerkung: **Satz S 7-4** gilt auch für unbestimmte Integrale. Man läßt dann einfach die Integrationsgrenzen weg.

Satz S 7-5 Lineare Substitution

Für $p \neq 0$, q aus \mathbf{R} gilt: Ist F irgendeine Stammfunktion zu f , so ist

$$F(px + q) \quad \text{eine Stammfunktion zu} \quad p \cdot f(px + q).$$

Mithin gilt für das unbestimmte Integral

$$\int p \cdot f(px + q) dx = \int f(z) dz \Big|_{z=px+q} = F(px + q) + C$$

Beweis: Einfach $F(px + q)$ mit Kettenregel nach x differenzieren. ■

Folgerung: Für das bestimmte Integral gilt nach **Satz S 7-3**:

$$\int_a^b p \cdot f(px + q) dx = F(z) \Big|_{z=pa+q}^{z=pb+q} = F(pb + q) - F(pa + q)$$

Anmerkung: Achten Sie darauf, dass im Integral der Faktor p davorstehen muss! Wenn der Faktor p fehlt, kann man ihn immer mittels $1 = \frac{1}{p} \cdot p$ ergänzen.

Beispiel:

Gesucht ist eine Stammfunktion zu $f(x) = \sin 2x$. Setzt man $p=2$ und $q=0$, so erhält man:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} (-\cos(2x) + C) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} C$$



Übung: Berechnen Sie mit Substitutions- und/oder Summenregel:

$$(a) \int e^{cx+d} dx \quad \text{und} \quad (b) \int \left(5e^{-x} + \frac{1}{-3x+2} \right) dx$$

(c) die Fläche unter der Kurve $f(x) = \sin(2x+10)$ von $x = -5$ bis $x = -5+\pi/2$

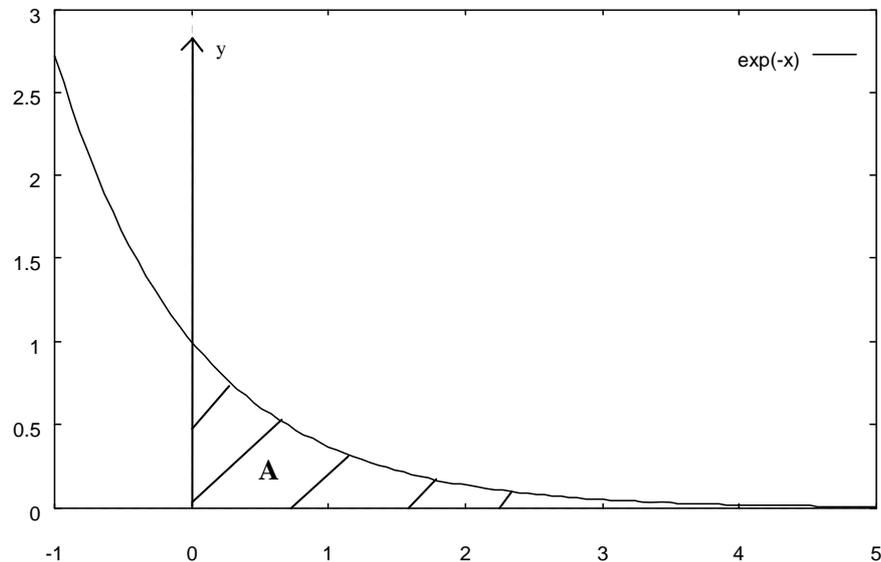
Auf weitere Integrationstechniken, wie die **partielle Integration**, die (allgemeine) **Substitution** und die **Partialbruchzerlegung** wird hier nicht eingegangen. Details hierzu finden sich bei [Stingl03][Papula01].

Im praktischen (Informatiker-) Leben ist es eher wichtig, dass man eine Vorstellung davon hat, was ein Integral ist und wo man es verwendet. Zum Berechnen von Integralen greift man meist auf Formelsammlungen zurück (man sollte die Summenregel und die lineare Substitutionsregel allerdings kennen!) oder man benutzt Computeralgebrasysteme (CAS) wie Maple.

7.6. Uneigentliche Integrale

Bisher gingen wir davon aus, daß die zu integrierende Funktion beschränkt ist und die Integrationsgrenzen endlich sind. Diese Voraussetzungen wollen wir jetzt abschwächen. Beispiel:

Man berechne die Fläche **A** unter der Kurve $f(x) = e^{-x}$ für $0 \leq x < \infty$.



Obwohl der Integrationsbereich unendlich ist, hat die Fläche **A** einen endlichen Wert. Dies wollen wir nun genauer definieren:

Def D 7-4: Uneigentliches Integral 1. Art

Die Funktion $f(x)$ sei stetig und integrierbar. Man nennt die folgenden Grenzwerte

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

(an der oberen bzw. unteren Grenze) **uneigentliche Integrale 1. Art**. Existieren die zugehörigen Grenzwerte, so heißen die Integrale **konvergent**.

Für beidseitig unendliche Integrationsbereiche setzt man

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

Beispiel:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} (1 - e^{-c}) = 1.$$

Neben diesen uneigentlichen Integralen 1. Art, die durch unbeschränkte Integrationsgrenzen charakterisiert sind, ist der Fall denkbar, daß die zu integrierende Funktion $f(x)$ innerhalb oder an den Grenzen des Integrationsintervalls Pole (d.h. Unendlichkeitsstellen) besitzt. Dies definiert die uneigentlichen Integrale 2. Art.

Def D 7-5: Uneigentliches Integral 2. Art

Die Funktion $f(x)$ sei integrierbar und habe an der Stelle $x = b$ eine Polstelle. Man nennt die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_a^c f(x) dx$$

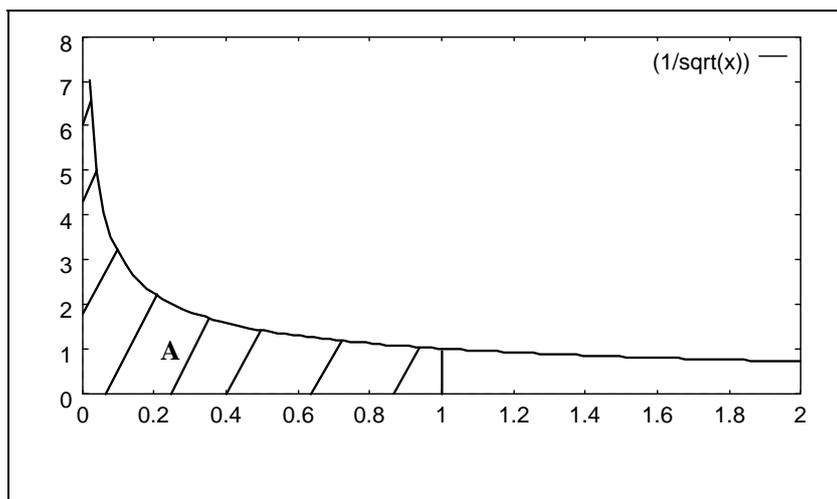
bzw.

$$\int_b^d f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b} \int_c^d f(x) dx$$

(an der oberen bzw. unteren Grenze) **uneigentliche Integrale 2. Art**. Existieren die zugehörigen Grenzwerte, so heißen die Integrale **konvergent**.

Beispiel:

Man berechne die Fläche **A** unter der Kurve $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \in [0,1]$. Schema:



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_b^1 = \lim_{b \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{b}) = 2.$$

Das uneigentliche Integral konvergiert also.

In Vorlesung Beispiel für Integrale, die an der Polstelle nicht konvergieren.



Übung: Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-(2x+1)} dx$

Kommen eigentlich uneigentliche Integrale in der Praxis vor? Wozu braucht man sie? – Sie kommen viel öfter vor, als Sie vielleicht denken. Beispiel:

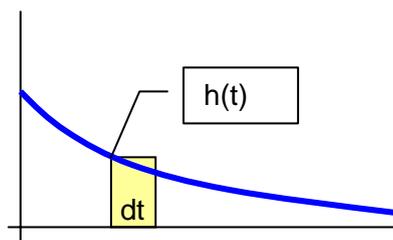


Übung: Sie sind Qualitätsmanager bei einem großen Glühbirnen-Hersteller und müssen daher die Lebensdauer der Produkte prüfen. Dazu hat Ihr Mitarbeiter im Werk Süd lange Versuchsreihen gemacht, in denen er für 1000 Glühbirnen die Brenndauer bestimmte. Er ruft Sie an und sagt:

"Die Treppenkurve der Glühbirnen, die im Intervall $t+dt$ ausfallen, läßt sich approximieren durch eine Exponentialkurve mit Zerfallskonstante $\lambda=0.036$."

Also als Formel und als Bild

$$h(t)dt = ce^{-\lambda t} dt$$



(Fläche Rechteck $h(t)dt$ = Anzahl der Glühbirnen, die zwischen t und $t+dt$ ausfallen)

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne mindestens $s=100$ Zeiteinheiten lebt?

7.7. Geometrische Anwendungen der Integration

Wir fassen die wichtigen geometrischen Aufgaben, die sich mit Integralen lösen lassen, in nachfolgendem Satz zusammen:

| Satz S 7-6 Geometrische Anwendungen der Integration | | |
|---|--------------------------------------|--|
| Es sei $f(x)$ eine im Intervall $[a,b]$ integrierbare Funktion. Für die Kurvenlängen-Formel sei $f(x)$ zusätzlich stetig differenzierbar in $[a,b]$. Dann gelten folgende Formeln: | | |
| (a) Fläche unter Kurve | $F = \int_a^b f(x) dx$ | Fläche zwischen $f(x)$ und x -Achse. Bereiche mit $f(x)<0$ zählen negativ. |
| (b) Volumen Rotationskörper | $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ | Volumen des sich ergebenden Körpers, wenn man $f(x)$ um die x -Achse rotieren läßt |
| (c) Kurvenlänge | $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ | Länge der Kurve zu f , die sich von $(a,f(a))$ bis $(b,f(b))$ erstreckt |

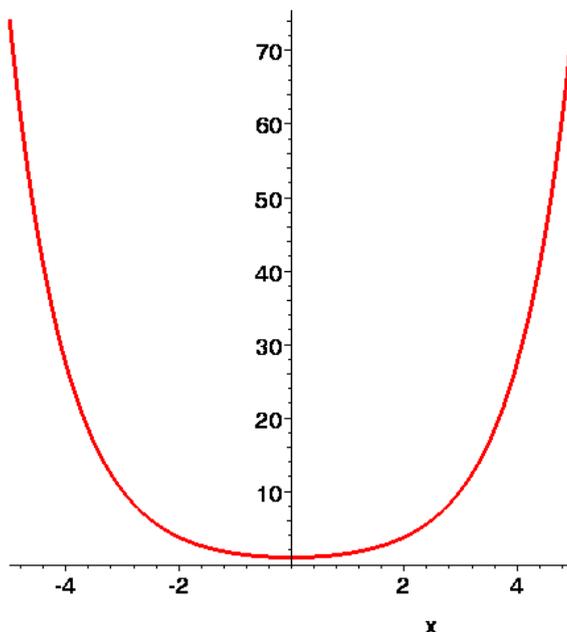
Fall (a) ist nach **Def D 7-1** klar.

Zu (b) und (c) Zeichnungen und geometrische Beweise in Vorlesung



Übung: Die Funktion $f(x)=\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (**Cosinus hyperbolicus**) heißt auch **Kettenlinie** und dies hat eine sehr anschauliche Bedeutung: Eine an zwei Punkten aufgehängte Kette hängt dazwischen in einer durch **COSH** bestimmten Form.

Wird eine Kette an den Punkten $P(-5 | \cosh(-5))$ und $P(5 | \cosh(5))$ aufgehängt und geben wir ihr dazwischen soviel „Kette“, dass sie bis auf $P(0 | 1)$ durchhängt (siehe Zeichnung, weil $\cosh(0) = 1$), dann wird die Kettenlinie genau durch $\cosh(x)$ beschrieben:



Nun zur **Aufgabe:** Wenn ein Kettenglied 0.1 Einheiten lang ist und die Kette wie oben beschrieben zw. -5 und 5 aufgehängt wird, wieviel Kettenglieder braucht man dann?

Zusatz: Wie können Sie checken, ob Ihr Ergebnis plausibel ist? Suchen Sie in der Zeichnung eine obere und untere Schranke für die Kettenlänge und vergleichen Sie diese Schranken mit Ihrem Ergebnis.

[\[function-plots.mws\]](http://function-plots.mws)

7.8. Fazit Integrale

Folgende Begriffe zu Integralen haben wir kennengelernt

| | |
|--|--|
| <p>bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$</p> | <p>Fläche zwischen Kurve $f(x)$ und x-Achse von $x=a$ bis $x=b$. Flächen, bei denen die $f(x)$ unterhalb der x-Achse ist, zählen negativ. Wird berechnet als Differenz des unbestimmten Integrals $F(b)-F(a)$.</p> |
| <p>unbestimmtes Integral $\int f(x)dx = F(x) + C$</p> | <p>Menge aller Stammfunktionen, also eine <i>Funktionenfamilie</i>, deren Elemente sich alle durch eine additive Konstante " + C" unterscheiden.</p> |
| <p>uneigentliches Integral 1. Art</p> | <p>Integral mit mind. eine Integrationsgrenze im <u>Unendlichen</u>, z.B. $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x)dx$. Kann wie jeder Grenzwert <i>konvergent</i> oder <i>divergent</i> sein.</p> |
| <p>uneigentliches Integral 2. Art</p> | <p>Integrand hat an einer Integrationsgrenze eine <u>Polstelle</u>, z.B. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$</p> |

Integrationsstechniken:

| | |
|-----------------------------------|---|
| Summenregel (Linearität) | $\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$ |
| Lineare Substitutionsregel | $p \int_a^b f(px + q) dx = F(z) \Big _{z=pa+q}^{z=pb+q}$ |

Anwendungsbeispiele Integrale:

- Fläche unter Kurven
- Volumen von Rotationskörpern
- Länge von Kurven
- Kumulation von (Wahrscheinlichkeits-) Verteilungen (Bsp. Glühbirnen) (s. Mathe 2)
- Lösen von Differentialgleichungen (s. Mathe 2 u. [WPF Spiele, Simulation + dynamische Systeme](#))