Übungsblatt 1

Aussagenlogik

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie die Richtigkeit der Äquivalenzen:

a) De Morgan'sche Regel 1: $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

b) De Morgan'sche Regel 2: $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

c) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$

d) "Ausmultiplizieren 1": $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

e) "Ausmultiplizieren 2": $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

HINWEIS: Wahrheitstafeln.

Aufgabe 1.2

Vereinfachen Sie (mittels der Regeln aus Aufg. 1.1):

a) $\overline{(p \Rightarrow q)} \vee q$ b) $((p \vee q) \wedge \overline{q}) \Rightarrow p$

Aufgabe 1.3

Negieren Sie folgende Aussagen korrekt!

a) Claire ist in Kanada geboren oder ihr Vater ist nicht Europäer

b) Die Zahl der positiven Teiler von 10 000 ist größer als 10 aber kleiner als 30

c) $-1 \leq x \leq +3$

d) $4 \leq x^2 \leq 9$

e) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2$.

f) Für alle $\varepsilon>0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

Aufgabe 1.4 Widerspruchsbeweis

Beweisen Sie:

a) Für jede positive reelle Zahl x gilt: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

b) Für jede natürliche Zahl n gilt: $\frac{n^3 + 2}{n^5 + n} > \frac{1}{n^2}$

Aufgabe 1.5 Party-Logik (+)

Arno, Britta, Carl und Dörte überlegen, heute Abend auf eine Party zu gehen.

1) Arno: „Wenn Carl kommt, komme ich auch!“

2) Britta: „Wenn Arno kommt, dann gehe ich auf gar keinen Fall dorthin. Aber wenn er nicht hingeht, dann bin ich mit dabei.“

3) Carl: „Ich komme nur, wenn Dörte und Britta auch kommen."
4) Dörte: „Ohne Carl gehe ich auf keinen Fall dorthin!"
5) Arno und Dörte werden nie zusammen auf einer Party gesehen.
6) Heute Abend ist auf jeden Fall Britta oder Dörte anwesend.

Wer ist auf der Party, wer nicht?

Hinweis: Stellen Sie Aussagen auf, und versuchen Sie – wenn möglich – Variablen zu eliminieren. Bsp.: Eine Aussage $x \Leftrightarrow \overline{y}$ erlaubt es, entweder die Variable x oder die Variable y zu eliminieren.
Für die verbleibenden Variablen kann eine Wahrheitstafel helfen.

Zahlsysteme, Gleichungen

Aufgabe 1.6 - entfällt -

Aufgabe 1.7 Darstellung reeller Zahlen

Rechnen Sie die folgenden Zahlen in Brüche um: $a)\,10.8\overline{14}$ $b)\,0.000\overline{9}$ $c)\,0.\overline{123}$

Aufgabe 1.8 Potenzen und Logarithmen

Suchen Sie einfachere Schreibweisen der folgenden Ausdrücke

$$a)\,T(a,b) = \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

$$b)\,T(a) = \frac{\sqrt[6]{a^{-1}} \cdot \sqrt[3]{a^2\sqrt{a^3}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\sqrt{a}}}$$

$$c)\,\ln(abc) + \ln b - \ln(b^3), \qquad d)\,\log_b\left((ab)^c\right) \qquad e)\,\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} 3^{\sqrt[3]{3}}$$

Hinweis zu a),b): Bringen Sie auf die Form: $\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n}$

f) Ein Autounfall mit Fahrerflucht hat sich vergangene Nacht um circa 2^{00} zugetragen. Die Polizei hat den Flüchtigen am nächsten Morgen festnehmen können. Blutproben um 8^{00}, bzw 10^{00} ergaben Blutalkoholkonzentrationen von 0.50 bzw 0.35 Promille. Nach wiss. Befunden nimmt die Alkoholkonzentration im Blut nach dem Zeitgesetz $p(t) = a \cdot e^{\alpha t}$ ab. Ermitteln Sie aus den beiden Messungen a und α und berechnen Sie die mutmaßliche Alkoholkonzentration zum Tatzeitpunkt.

HINWEIS: Man stelle zwei Gleichungen auf!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 11./12.10.11 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 1.9 Lösen von Gleichungen

a) Herr Meier befindet sich mit seinem Pkw auf der Autobahn zwischen Köln und Olpe. Wenn Herr Meier zwanzig Kilometer auf der Autobahn weiterfährt, ist er genausoweit entfernt von der Abfahrt Gummersbach, wie wenn er in die entgegengesetzte Richtung 5 km zurückfährt. Wie weit ist Herr Meier von der Ausfahrt entfernt? Man stelle eine Gleichung auf!

b) Lösungsmenge bestimmen: $|x+1| + |x-1| = 4 \cdot |3-x|$

HINWEIS: Oft hilft eine Skizze für die Fallunterscheidung!

c) Es sei a>1 ein beliebiger Parameter. Man bestimme für x die Lösungsmenge der Gleichung $|3x-a| + |2x+a| = 1$

d) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen f(x) und g(x) an:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-4x} - 1$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} - \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x^2-4}$$

e) Lösen Sie die Gleichung $0 = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-4x} - 1$ (Probe nicht vergessen!)

f) Man gebe einen Wert x an, so daß y, def. durch $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, den Wert -0.5 annimmt!

g) Man bestimme Definitions- und Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{5x^2+x}{x^2-1} \le 5$!

Aufgabe 1.10 Mengenschreibweisen

Stellen Sie folgende Teilmengen der reellen Zahlen (i) in der "Für-die-gilt-Schreibweise" und (ii) in der "**R** ohne" Schreibweise dar.

Bsp: Die Menge aller positiven reellen Zahlen ist (i) $\{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$ und (ii) $\mathbf{R} \setminus (-\infty,0]$.

(a) Zahlen, die größer 1 oder kleiner 0 sind, ausser 2 und -2

(b) positive, aber nicht ganze Zahlen

(c) Zahlen, die größer als 3, kleiner-gleich 5 sind oder die negativ, aber nicht -10 sind.

Aufgabe 1.11 Einfache Summen

(a) Leiten Sie her: $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$

(b) Berechnen Sie: $\sum_{i=1}^{N}(i+2)$ (c) $\sum_{i=1}^{100}(i+2)\sum_{j=0}^{15} j$ (d) $\sum_{i=1}^{100} i + 2\sum_{j=0}^{15} j$

WICHTIGER HINWEIS: Ergebnisse, wenn möglich, in Maple kontrollieren!!!