Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.11 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Übungsblatt 4 Differentialrechnung

Aufgabe 4.1 Ableitungen

Geben Sie die 1. Ableitung an

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x+1)(x-3)} \qquad x \neq -1{,}3$

(b) $f(x) = e^{\sin(x^2)} + e^{\sin^2 x}$ (e) $f(x) = x^x$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-c\cdot x+d}}$ mit c>0

Aufgabe 4.2

In welchen Intervallen ist f(x) (streng) monoton fallend / wachsend?

In welchen Intervallen ist f(x) konvex / konkav?

Wie oft ist f(x) stetig differenzierbar?

a) $f(x) = -x^3 - 4x + 1$

b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

c) $f(x) = (2H(x) - 1) \cdot x^3$ mit $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Plots in Maple!

Hinweis: Argumentieren Sie mit 1. bzw. 2. Ableitung. Evtl. vorher f(x) in „günstige“ Form bringen!

Aufgabe 4.3 Taylor-Polynom

(a) Man bestimme das Taylorpolynom zu $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 4! Wie genau ist dieses Polynom $P_4(x)$ für $x = 0.4$?

(b) Man bestimme das Taylorpolynom zu $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ zum Grade 2! Wie genau ist dieses Polynom $P_2(x)$ für $x = -0.2$?

Aufgabe 4.4 L'Hospital

Arbeiten Sie die Informationen in Kapitel 5.5 des Skriptes durch, überprüfen Sie die Voraussetzungen des Satzes von L'Hospital und berechnen Sie damit folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x$.

HINWEIS zu (d): Hier muss man erst geeignet umformen, dass ein Ausdruck $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ entsteht. Von den zwei möglichen Arten, dies zu tun, hilft nur eine wirklich weiter!

Bereiten Sie die Aufgaben für den 06./07.12.11 so vor, dass Sie in der Lage sind, Ihre Lösungen vorzutragen.

Aufgabe 4.5 Kurvendiskussion

Führen Sie für folgende Funktionen eine verkürzte Kurvendiskussion durch

- max. Definitionsbereich,
- Grenzwertverhalten bei $\pm\infty$ und bei Definitionslücken,
- Extremstellen,
- Wendepunkte,
- zum Abschluss qualitative Skizze der Funktion machen

(a) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}$ **(b)** $f(x) = \frac{1}{1+e^{-cx}}$ mit $c>0$

Kontrollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Maple!

Aufgabe 4.6 Extremwerte 1: Dosen

Ein Dosenfabrikant möchte Tomatensuppe im Volumen V je Dose möglichst kostengünstig in zylindrische Konservendosen verpacken (Höhe h, Radius r). Welches Verhältnis h/r wählt er, um die Blechmenge je Dose zu minimieren?

Aufgabe 4.7 Extremwerte 2: Kugel + Kegel

Gegeben ist eine Kugel mit Radius R. Bestimmen Sie die Höhe h des dieser Kugel einbeschriebenen Kegels so, dass der Kegel maximales Volumen besitzt.

HINWEIS: Machen Sie eine Skizze und versuchen Sie, mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über die Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck zum richtigen Ansatz zu kommen.