

V 31.10.12 |

n	(a_n)	$ a_n - 1 $
1	0.9	$0.1 = 10^{-1}$
2	0.99	$0.01 = 10^{-2}$
3	0.999	10^{-3}
$\vdots$	$\vdots$	
n	$0.\underbrace{9 \dots 9}_n$	10^{-n}
∞	$0.9 = 1$	

Def 13.4 g heißt Grenzwert v. (a_n)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : |a_n - g| < \varepsilon \text{ f. } n \geq n_0$

Beispiel 1: Beh: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Bew.: $|a_n - g| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$

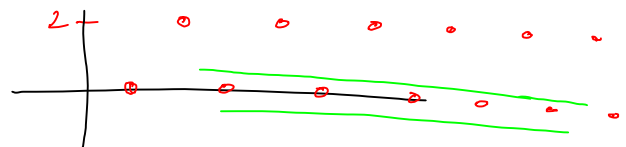
Damit $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$

Wähle ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

Bsp: $\varepsilon = 0.001 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = 1000$

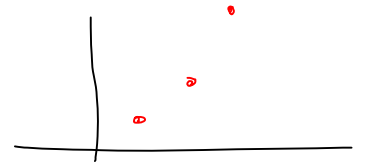
Wähle $n_0 = 1001 : \left| \frac{1}{1001} - 0 \right| < 0.001$

Beispiel 3: $a_n = 1 - (n-1)^n$



a_n ist divergent, weil jedes Band der Breite $\varepsilon = 0.1$ unendlich viele Folgenglieder "verpasst",

Beispiel 4



zu Beispiel 6:

Sei $q = \frac{1}{2}$. Dann $(a_n) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$q = 1$. Dann $(1^n) = 1, 1, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$q = 2$. Dann $(2^n) = 2, 4, 8, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

$q = -1$. Dann $((-1)^n) = -1, 1, -1, \dots$ divergent

$q = -2$. Dann $((2)^n) = -2, 4, -8, 16, \dots$



Beispiele dafür, daß " $\infty - \infty$ " unentscheidbar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\infty - \infty) \quad \text{nicht entscheidbar}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ∞ ∞

Anders rechnen $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = \underline{\underline{-\infty}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - (n+3)) = \underline{\underline{-3}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ∞ ∞

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (+n) = \underline{\underline{+\infty}}$$

Beispiel zum Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n} \right) \stackrel{1. \text{ Versuch}}{=} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3n)} = \frac{\infty}{\infty} = ? \text{ unentscheidbar}$$

2. Versuch: Erweitern mit größter Potenz im Nenner (g.P.i.N.), hier $\frac{1}{n}$
Kehrwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n-1) \cdot \frac{1}{n}}{3n \cdot \frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{n}}{3} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

(ii) 1b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{4n^2+1} \right) \quad \left| \cdot \frac{1}{n^2} \right.$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \frac{0 - 0}{4 + 0} = \underline{\underline{0}}$$

1c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-1}{4n} \right) \quad \left| \cdot \frac{1}{n} \right.$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - \frac{1}{n}}{4} \right)$$

$$= \frac{\infty - 0}{4} = \frac{\infty}{4} = \underline{\underline{\infty}}$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n^2-1}{3n^2+2} \right)^2$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2-1}{3n^2+2} \right)^2 \quad \left| \cdot \frac{1}{n^2} \right.$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{2}{n^2}} \right)^2 = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{49}{9}}}$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3}{n-1} \right)$

$$\left(\begin{array}{l} \text{1. Versuch} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n+1} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n-1} \right) \\ = \frac{\infty}{1+0} - \frac{\infty}{1-0} \\ = \infty - \infty = ? \end{array} \right)$$

Hauptnenner

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(n-1) - n^3(n+1)}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^4} - n^3 - \cancel{n^4} - n^3}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^3}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{1 - \frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{\frac{-2\infty}{1-0} = -\infty}}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^k + 6 \cdot 10^{2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3} - 20 \cdot 10^{2k-2}} \quad \left| \frac{\cdot 10^{-2k}}{\cdot 10^{-2k}} \right. \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot 10^{k-2k} + 6 \cdot 10^{2k-2k}}{0.4 \cdot 10^{k-3-2k} - 20 \cdot 10^{2k-2-2k}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{75 \cdot \cancel{10^{-k}} + 6}{0.4 \cdot \cancel{10^{-k}} \cdot 10^{-3} - 20 \cdot 10^{-2}} \\
 &= \frac{0 + 6}{0 - 0.2} = \underline{\underline{-30}}
 \end{aligned}$$

N.R.

$$10^{2k-2} = 10^{2k} \cdot 10^{-2}$$

größte Potenz

Kehrwert ist $10^{-2k} = \frac{1}{10^{2k}}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (10^{-k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10^k} \right) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k$$

Landau'sche O-Notation

Anmerkungen zu Def D3-5

- 1) Die Folge $B=(b_n)$ wird so gewählt, dass sie
 - a) möglichst einfach ist (also n^3 statt $n^3 + n + 0.5$)
 - b) möglichst "billig" ist im Sinne von Laufzeit-"kosten" (also $b_n = n^3$ statt $b_n = n^5$)

2) Welche "einfachen" Folgen kommen in der Informatik häufig vor? Meist

$$O(1) < O(\log n) < O(n) < O(n \log n) < O(n^2) < O(n^2 \log n) < \dots < O(2^n)$$

Beispiele

1) $2n^3 - n^2 \in O(n^3)$, denn $\frac{2n^3 - n^2}{n^3} = 2 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$, also ~~beschränkt~~ beschränkt

2) $n+2 \in O(n)$, aber auch $n+2 \in O(n^2)$ (nicht das Billigste)
oder $n+2 \in O(4n)$ ("einfachste")

3) $6n \log n + 270n + 4 \in O(n \log n)$

4a) $a_n = 4n^3 + 5n = 4n^3 + O(n)$

4b) $4n^3 + 2n^2 = 4n^3 + O(n^2)$ (4b) ist "teurer" als (4a)

zu 4a) $(a_n) - 4n^3 = 4n^3 + 5n - 4n^3 = 5n \in O(n)$

<u>Übung</u>	<u>Folge</u>	(a)	(b)
	$2n^3 - n^2$	$O(n^3)$	$2n^3 + O(n^2)$
	<u>$7n^5 + 26n^6$</u>	$O(n^6)$	$26n^6 + O(n^5)$

zu a) denn $\frac{7n^5 + 26n^6}{n^6} = \frac{7}{n} + 26 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 26$

($O(n^5)$) würde nicht reichen, denn $\frac{7n^5 + 26n^6}{n^5} = 7 + 26n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

zu b) $7n^5 + 26n^6 - 26n^6 = 7n^5 \in O(n^5)$ (nicht beschränkt)