Ü

	Folge	(a)	(b)
①	$7n^5 + 26n^6$	$\mathcal{O}(n^6)$	$26n^6 + \mathcal{O}(n^5)$
②	$n + 3n^2 - 2n\log(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$3n^2 + \mathcal{O}(n\log(n))$
③	$\frac{n^4+n^2}{n+5}$	$\mathcal{O}(n^3)$	$n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

N.R. ② $n + 3n^2 - 2n\log(n) - 3n^2$

$= n - 2n\log(n)$

ist $\mathcal{O}(n)$? – Nein!

$$\frac{n - 2n\log n}{n} = 1 - 2\log(n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

ist es $\mathcal{O}(n\log n)$? Ja

$$\frac{n - 2n\log(n)}{n\log(n)} = \frac{1}{\log(n)} - 2 \xrightarrow{n\to\infty} -2$$

③ (a) $\frac{n^4+n^2}{(n+5)} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{n^4+n^2}{n^4+5n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(b) $\frac{n^4+n^2}{n+5} - n^3 = \frac{\cancel{n^4}+n^2 - n^3(\cancel{n}+5)}{n+5}$

$$= \frac{n^2 - 5n^3}{n+5} = \frac{n - 5n^2}{1 + 5/n}$$

$\cdot\left(\frac{1}{n}\right)$ / $\cdot\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-5n^2}{1+\frac{5}{n}}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}(n) - \lim_{n\to\infty}(5n^2)}{1 + 0}$$

Übung

	Erster Algo	Zweiter Algo	Erster / Zweiter
Fall 1	$A_n \in \mathcal{O}(n^2)$ $A_n = n^2 + \mathcal{O}(n)$	$B_n \in \mathcal{O}(n^2)$ $B_n = 3n^2 + \mathcal{O}(1)$	$\frac{1}{3}$, also A_n schneller
Fall 2	$A_n' \in \mathcal{O}(n^2)$ $A_n' = \frac{n^2}{10!} + \mathcal{O}(n)$	$B_n' \in \mathcal{O}(n^2)$ $B_n' = \frac{3n^2}{10!} + \mathcal{O}(1)$	$\frac{1}{3}$
Fall 3	$C_n = 50n + \mathcal{O}(1)$	$D_n = n + \mathcal{O}(1)$	$\frac{50}{1}$, also D_n schneller

N.R. Fall 3

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n^2 - 650n + 40}{2n+50} + 40\right) \quad \Big| \frac{\cdot\left(\frac{1}{n}\right)}{\cdot\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{100n - 650 + 40/n}{2 + 50/n} + 40$$

$$= \lim_{n\to\infty}(50n) + \mathcal{O}(1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!\; n}{(n-1)!\,(n+1)^2} + 1000\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot n}{1\cdot(n+1)^{\cancel{2}}} + 1000\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1} + 1000\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n) + \mathcal{O}(1)$$

Übung im Fazit

	konverg.	divergent
beschränkt	$\frac{1}{n}$	$(-1)^n$
unbeschränkt		n^2

Wahr oder falsch?

- Jede best.-div. Folge ist divergent — WAHR
- Jede divergente Folge ist best.-div. — FALSCH wg $(-n)^n$ oder $(-1)^n$
- Folge ist konvergent oder $\to +\infty, -\infty$ — FALSCH wg $(-1)^n$

Modulare Arithmetik

Motivation: ISBN enthält Prüfziffer
Prüfziffern beruhen auf modularer Arithmetik

Bsp: "7 durch 5" ist 1 Rest 2

$7 \bmod 5 = 2$
$12 \bmod 5 = 2$
$13 \bmod 5 = 3$

Kürzen ist in der Mod-Welt <u>NICHT</u> erlaubt

Denn $2 \cdot 4 = 5 \cdot 4 \pmod 6$ ABER $2 = 5 \pmod 6$ (4 gekürzt) ist <u>FALSCH</u>

$\Leftrightarrow \quad 8 = 20 \pmod 6$

$\Leftrightarrow \quad 6+2 = 18+2 \pmod 6$ ✓

Auflösen nach p

$8 + p = 2 \pmod{11} \quad | +3$

$\Leftrightarrow \quad 11 + p = 5 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad p = 5 \pmod{11}$

Terme vereinfachen:

$(117 \cdot 76 + 303 + 6^{7096}) \bmod 5$

$= (2 \cdot 1 + 3 + \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{7096\text{ mal}}) \bmod 5$

$= (5 + 1^{7096}) \bmod 5$

$= 1$

ISBN Singh: Welches p für 3-446-19873-p ?

$10 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 6 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad 250 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad 250 - 220 - 22 + p = 0 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad 8 + p = 0 \pmod{11} \quad | +3$

$\Leftrightarrow \quad 11 + p = 3 \pmod{11}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{p = 3} \pmod{11}$

Übung 3-446-91873-3

$$10\cdot 3 + 9\cdot 4 + 8\cdot 4 + 7\cdot 6 + 6\cdot 9 + 5\cdot 1 + \ldots + 2\cdot 3 + 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 261 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 261 - 220 - 33 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8 \equiv 0 \pmod{11} \quad \lightning$$

keine gültige ISBN

Übung (+):

$$10\cdot x - 10\cdot 3 + 261 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10\cdot x + 231 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Leftrightarrow \quad 10x \equiv 0 \pmod{11}$$

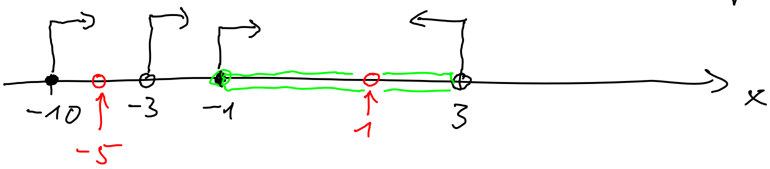
x	$10x$	$10x \equiv 0 \pmod{11}$
0	0	✓
1	10	–
2	20	–
3	30	–
⋮	⋮	
9	90	–

Folgerung: Nur für ein $x = 0$ kommt fälschlicherweise eine gültige ISBN heraus.
Alle anderen Kombinationen „Zahlendreher + falsche Ziffer x" werden erkannt.

Funktionen

Bsp. Definitionsbereich von $f(x) = \frac{\sqrt{x+10}}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\sqrt{x+1}}{(x-1)\cdot(x+5)}$

Beachte: Nenner darf nicht Null werden
und Radikand darf nicht negativ werden, z.B $x+10 \geq 0$ für $\sqrt{x+10}$



$D = [-1, 3) \setminus \{+1\}$

N.R.

$9 - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad 9 > x^2$

$\Leftrightarrow \quad |\sqrt{9}| > |x|$

$\Leftrightarrow \quad 3 > |x|$