

(www.meinprof.de)

V 14.11.2012

## Grenzwert einer Funktion

Beispiel:  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

|        |           |           |           |            |
|--------|-----------|-----------|-----------|------------|
| $x$    | $\pm 1.0$ | $\pm 0.5$ | $\pm 0.2$ | $\pm 0.01$ |
| $f(x)$ | 0.841     | 0.959     | 0.993     | 0.99998    |

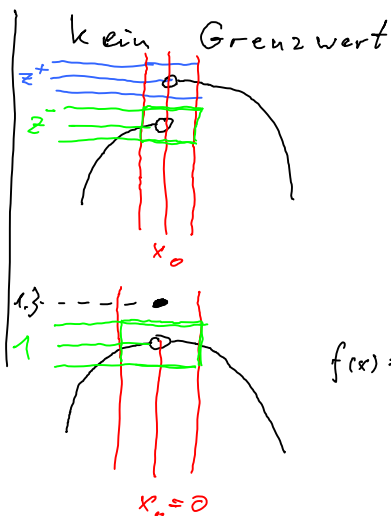
Beispiel 2:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \in \mathbb{R}^{\neq 0} \setminus \{1\} \\ -\frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0+1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \infty \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ ist nicht definiert}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & f, x \neq 0 \\ 1.3 & f, x = 0 \end{cases}$$

Übung a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (x+1) \cos(x-1) + \frac{\sin(x-1)}{x+1} \right] \stackrel{x=1 \text{ einsetzen}}{=} (1+1) \cos(0) + \frac{\sin(0)}{1+1} = \underline{\underline{2}}$

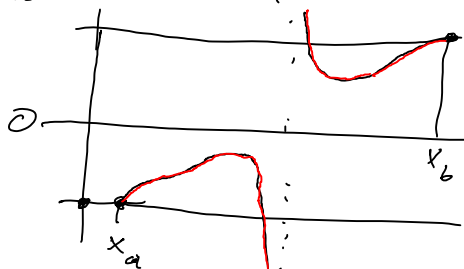
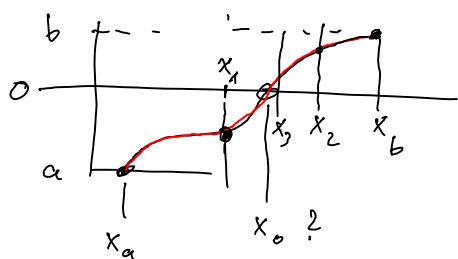
b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x+2}{x-1} - \frac{x^2+2x+3}{x^2-1} \right] \stackrel{x=1 \text{ einsetzen}}{=} \left[ \frac{1+2}{0} - \frac{6}{0} \right] = [\infty - \infty]$   
 $\nabla$  nicht entscheidbar

$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x+2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2+2x+x+2 - x^2-2x-3}{(x-1)(x+1)} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x+1} \right] \stackrel{x=1 \text{ einsetzen}}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

N.R.  $x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2$   
 $\frac{x^2+2x+3}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1 + \frac{2}{x+1}}{x-1}$

# Stetigkeit

Motivation: Nullstellen bestimmen



$f(x)$   
stetig in  $[x_a, x_b]$

(ohne Absetzen zu zeichnen)

$f(x)$  ist  
unstetig  
in  $[x_a, x_b]$

## Typen von Unstetigkeit

| Typ                  | Bsp                                                                                       |  |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| hebbare Unstetigkeit | $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ |  |
| Sprungstelle         | $f(x) = \frac{x}{ x }$ bei $x_0 = 0$                                                      |  |
| Polstelle            | $f(x) = \frac{1}{x}$ bei $x_0 = 0$                                                        |  |
| Oszillationspunkt    | $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$                                                     |  |

Übung: Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Nachtrag Wie rechnet man  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Anleihe aus Kapitel Taylor:  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$   
(oder Formelsammlung)

Einsetzen  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + \dots}{1}$

$\overset{x=0}{\text{einsetzen}} \Rightarrow \frac{1 - 0 + \dots}{1} = \underline{\underline{1}}$

Übung: "Stetig" heißt Grenzwert = Funktionswert bei  $x_0$

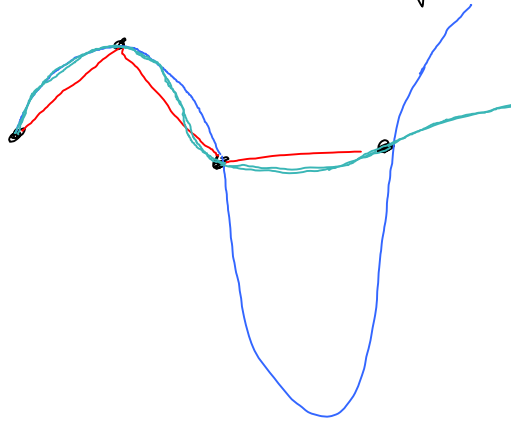
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f_1(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \underline{f_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \underline{1} \end{array} \right\} \text{unstetig}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & f. x \neq 0 \\ 1 & f. x = 0 \end{cases} \Rightarrow f_2(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 1 \Rightarrow \text{stetig}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x(x+1)} & f. x \neq 0 \\ -1 & f. x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x(x+1)} = \overset{\lim_{x \rightarrow 0}}{\frac{x(x-1)}{x(x+1)}} = \frac{-1}{1} = -1 = f_3(0) \Rightarrow \text{stetig}$$

$$f_4(x) = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_4(x) = -1 = f_4(0) \Rightarrow \text{stetig}$$

# Differentialrechnung



Steigung nur für  
Geraden def

