Differentialrechnung

V 21.11.2012

Ü Ableitung von $f(x)=x^2$ über Grenzwert

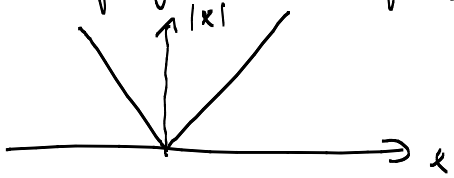
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{x_0^2}+2hx_0+h^2-\cancel{x_0^2}}{h} = \frac{2hx_0+h^2}{h} = 2x_0+h \xrightarrow{h\to 0} 2x_0 = f'(x_0)$$

Bei $f(x)=x^n$ haben wir $(x_0+h)^n = x_0^n + n h x_0^{n-1} + \dots$

Durch analoge Rechnung folgt $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$ ist Ableitung für $f(x)=x^n$

Betragsfunktion $f(x)=|x|$ ist bei $x=0$ nicht diff-bar.



Stetige Differenzierbarkeit

Beispiele

$f(x)=|x|$ ist in $x_0=0$ 0-mal stetig diff-bar

$g(x)=x\cdot|x|$ ist 1mal stetig diff-bar $\quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{f. } x\ge 0 \\ -x^2 & \text{f } x<0 \end{cases}$

weil $g'(x) = \left\{\begin{matrix} 2x & \text{f. } x\ge 0 \\ -2x & \text{f. } x<0 \end{matrix}\right\} = 2|x| = 2f(x)$

und $\lim_{x\to 0} g'(x)$ existiert $\quad \lim_{x\to 0} g'(x) = 0 \; . = g'(0)$

Also existiert $g'(x)$ und ist stetig

aber $g''(0)$ existiert nicht (Knick)

Beispiel Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{x^2}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot 2x - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

Kettenregel

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$
$$u = f(x)$$
$$h(g(f(x))) = (h \circ g \circ f)(x)$$
$$h(\underbrace{g(f(x))}_{v})' =$$
$$h'(v)\Big|_{v=g(f(x))} \cdot g'(u)\Big|_{u=f(x)} \cdot f'(x)$$

---

a) $$f(x) = \frac{x^3}{\boxed{(x+1)^2}}$$

$$u(x) = x^3, \quad u'(x) = 3x^2$$
$$v(x) = (x+1)^2, \quad v'(x) = 2(x+1)\cdot 1$$
$$(= 2x+2)$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x+1)^2}\cdot 3x^2 - 2\cancel{(x+1)}\cdot x^3}{\underline{(x+1)}\,\cancel{4}\,3}$$
$$= \frac{(x+1)\cdot 3x^2 - 2x^3}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$$

b) $$h(x) = e^{\sin(x^2)} = \exp(\sin(x^2))$$
$$= h(g(f(x)))$$

mit $h(v) = e^v$
$$v = \sin(x^2) = g(f(x))$$
$$u = x^2 = f(x)$$

$$h'(x) = e^v\Big|_{v=\sin(x^2)} \cdot \cos(u)\Big|_{u=x^2} \cdot 2x$$
$$= \underline{\underline{e^{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x}}$$

Ableitungen mit Betragsfunktion Bsp

$$f(x) = |(x+1)^3|$$

Fall 1: $(x+1)^3 > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$
$$f'(x) = ((x+1)^3)' = 3(x+1)^2 \xrightarrow{x+1 \to 0} 0$$

Fall 2: $(x+1)^3 < 0 \Leftrightarrow (x+1) < 0$
$$f'(x) = (-(x+1)^3)' = -3(x+1)^2 \xrightarrow{x+1 \to 0} 0$$

Für $x+1 = 0$: $f'(-1) = 0$

$f'(-1)$ ist definiert und $f'(-1) = 0$

Zur Ableitungstabelle

a) $(\log_a(x))'$ kann man herleiten aus $\ln(x)$, denn

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \left(\underbrace{\frac{1}{\ln(a)}}_{c} \cdot \ln(x)\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

b) $(a^x)'$ kann man herleiten aus e^x, denn

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel}}}{=} e^{x \ln a} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

<u>Übung</u> $g(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$. Ableitung bestimmen. Ist $g'(0)$ def.?

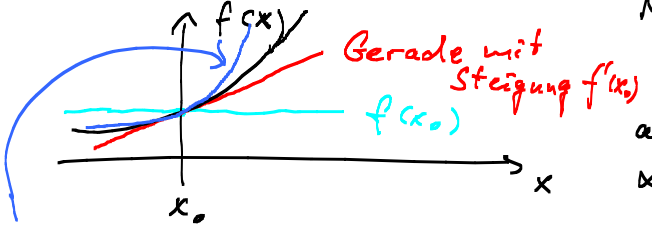
Lsg Fall 1: $x > 0$: $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$

Fall 2: $x < 0$: $g'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \ldots = \underline{\underline{+\frac{1}{x^2}}}$

In diesem Fall ist $g'(0)$ nicht definiert

weil $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$ (keine endl. Steigung)

Satz von Taylor



Parabel mit passender Steigung und Krümmung

Nehmen wir an, wir kennen $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ aber wir kennen nicht $f(x)$ für $x \neq x_0$.

Allgemeiner: Welches Polynom $P_n(x)$ hat in x_0 die gleichen Ableitungen $0, 1, 2, \dots, n$ wie $f(x)$ in x_0

k	$(P_n(x))^{(k)}$	$P_n^{(k)}(x_0)$	soll gleich sein zu
0	$a_0 + a_1(x-x_0)^1 + \dots + a_n(x-x_0)^n$	a_0	$f(x_0)$
1	$a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$	a_1	$f'(x_0)$
2	$2a_2 + \dots n(n-1) \cdot a_n \dots$	$2a_2$	$f''(x_0)$ $\Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$
...	... ...		
n	$n! a_n$	$n! a_n$	$f^{(n)}(x_0)$ $\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

Beispiel zu Taylor:

$\ln(x)$ annähern durch Taylorpolynom der Ordnung $n=3$, Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Was ist der Restglied fehler für $x \in [1,2]$? Speziell für $x=1.5$

Lsg:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(x_0)$
0	$\ln(x)$	$0 = \ln(1)$
1	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	1
2	$-x^{-2}$	-1
3	$+2x^{-3}$	$+2$
4	$-6x^{-4}$	

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= 0 + 1(x-1) + \frac{(-1)}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3$$

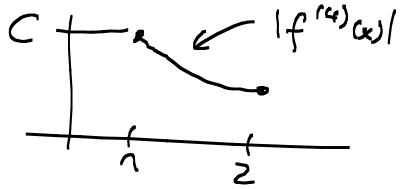
Welcher Fehler ist maximal möglich für $x \in [1,2]$

$$|R_3(x)| = |P_3(x) - f(x)| \leq \frac{C}{4!}(x-1)^4$$

Was ist C? $|f^{(4)}(x)| = |-6x^{-4}| = 6x^{-4}$ in $x \in [1,2]$

$6x^{-4}$ ist aber monoton fallend (denn $(6x^{-4})' = -24x^{-5} < 0$ in $x \in [1,2]$

Deshalb ist $C = |f^{(4)}(x)|_{x=1}$ (linker Rand) eine geeignete Schranke: $C = 6$



$$|R_3(x)| = \frac{6}{4!}(x-1)^4$$

Speziell für $x = 1.5$: $|R_3(1.5)| = \frac{6}{24}(0.5)^4 = \underline{\underline{0.0156}}$

Probe: $|\ln(1.5) - P_3(1.5)|$

$= |\ln(1,5) - \frac{10}{24}| = 0.01120$, stimmt, ist kleiner als 0.0156