V 28.11.2012

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
5	$\cos(x)$	1
6	$-\sin(x)$	

$$P_n(x) = f^{(0)}(0) + \frac{f^{(1)}}{1!}(x-0) + \frac{f^{(2)}}{2!}(x-0)^2 + \dots$$
$$= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

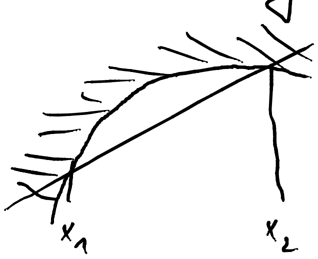
Restglied: obere Schranke für $|\sin(x)|$ ist z.B. $C = 1$

(Für $x \in [0, 0.3]$ ist $\sin x$ monoton steigend also ist $C = \sin(0.3)$ eine schärfere Schranke)

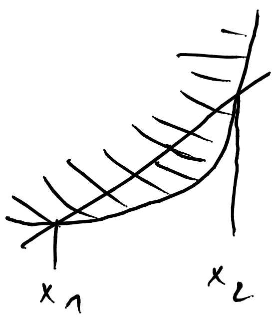
Also ist der Fehler kleiner als $R_5(x) = \frac{C}{6!} \cdot x^6$, also für $x = 0.3$ ist $R_n(0.3) = \frac{1}{6!} 0.3^6 \approx 1 \cdot 10^{-6}$

Probe: $|P_5(0.3) - \sin(0.3)| = |0.295520250 - 0.295520206| = 4.4 \cdot 10^{-8}$

Krümmung



konkav

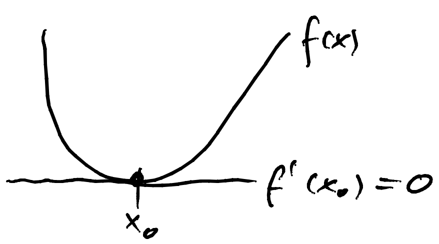


konvex

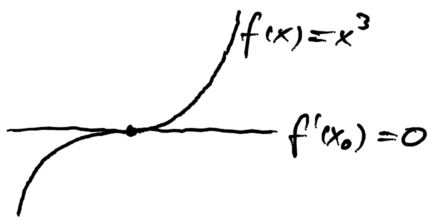
Merkspruch

"Ist der Bauch konkav war die Anna brav, ist der Bauch konvex hatte Anna ... "

Maximum / Minimum



Minimum



kein Minimum

Beispiel $f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

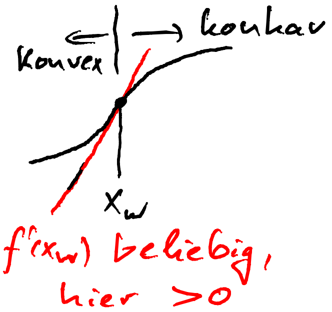
$f''(0) = -6 < 0$
also Max. bei $x = 0$

$f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$
also Min. bei $x = 2$

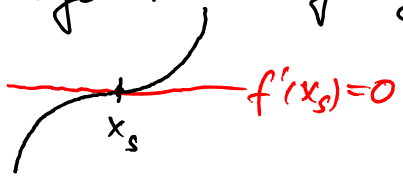
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2$$

Kandidaten für Extrema

Wendepunkte: Punkt wo das Krümmungsverhalten von konvex auf konkav oder umgekehrt wechselt



Sattelpunkt ist Wendepunkt mit Tangentensteigung $f'(x_s) = 0$



Übung: $f(x) = x(x-3)^2$ Nullstellen, (Extrema), Wendepunkte und Wendetangente

Nullstellen nach Faktorregel

$$x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0 \lor x = 3}}$$

Lösung 1: $f(x) = x(x^2 - 6x + 9)$
$= x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

Extrema-Kandidaten

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad |:3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad |$ q.E.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1 \lor x = 3}}$

$f''(1) = 6 - 12 < 0 \Rightarrow$ Max. bei 1

$f''(3) = 18 - 12 > 0 \Rightarrow$ Min. bei 3

Wendepunkt $f''(x) = 0 \ \vee\ f'''(x) \neq 0$

$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}} \qquad f'''(2) = 6 \neq 0$

also WP bei $x = 2$ liegt vor

Wendetangente: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$

$f(2) = 2 \cdot (2-3)^2 = 2$

$\Rightarrow \quad w(x) = -3 \cdot (x - 2) + 2$

<u>Lösung 2</u> $\quad f(x) = x(x-3)^2$

$u = x \qquad u' = 1$

$v = (x-3)^2 \qquad v' = 2(x-3)$

$f'(x) = 1 \cdot (x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)$

$= (x-3)[(x-3) + 2x]$

$= (x-3)(3x-3)$

$= 3(x-3)(x-1)$

Nullstellen von $f'(x)$ $\underline{\underline{x = 1}}$ und $\underline{\underline{x = 3}}$

$=$ Extrema-Kandidaten

$f''(x) = 3[(x-3) \cdot 1 + 1 \cdot (x-1)]$

$u = (x-3) \qquad u' = 1$

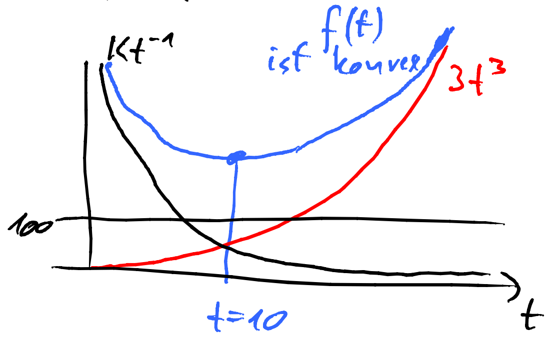
$v = (x-1) \qquad v' = 1$

$= 3[2x - 4] = 6x - 12$

... alles weitere wie bei Lösung 1

Übung Produktionsmaschine

$$f(t) = \frac{K}{t} + 100 + 3t^3 \quad \underbrace{\overset{!}{=} \text{Min}}_{\text{gesucht: Minima}}$$



$$f(t) = Kt^{-1} + 100 + 3t^3$$

$$f'(t) = -Kt^{-2} + 9t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 9t^2 = Kt^{-2} \quad | \cdot t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 9t^4 = K = 90000$$

$$\Leftrightarrow \quad t^4 = 10\,000 \quad | \sqrt[4]{}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \pm 10$$ (−-Lsg ist hier nicht relevant)

$$f''(t) = 2Kt^{-3} + 18t = \frac{2K}{t^3} + 18t$$

$$> 0 \quad \forall\, t > 0$$

$$\Rightarrow \quad t = 10 \text{ ist Minimum von } f(t)$$