

2. Teil Mathematik I

Studiengänge AI, TI, MI

Schmitter

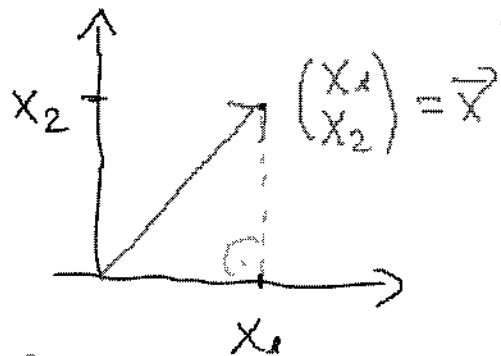
Vektorrechnung

Def: Vektor

Größe, die durch die Angabe einer

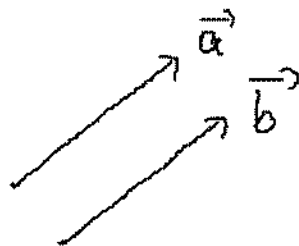
Maßzahl (Skalar) und einer Richtung
vollständig beschrieben wird.

Darstellung: $\vec{s}$
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

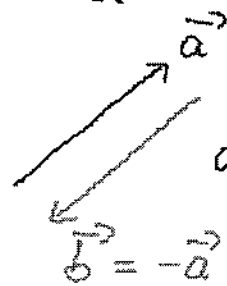


$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$|\vec{a}|$ Länge des Vektors



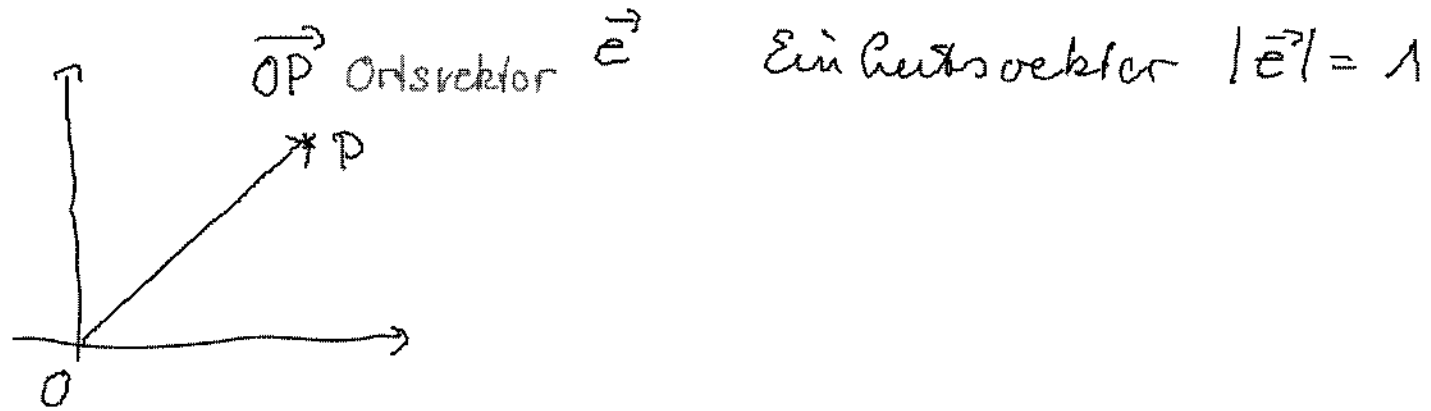
parallel



antiparallel

$\vec{b} = -\vec{a}$ inverse Vektor

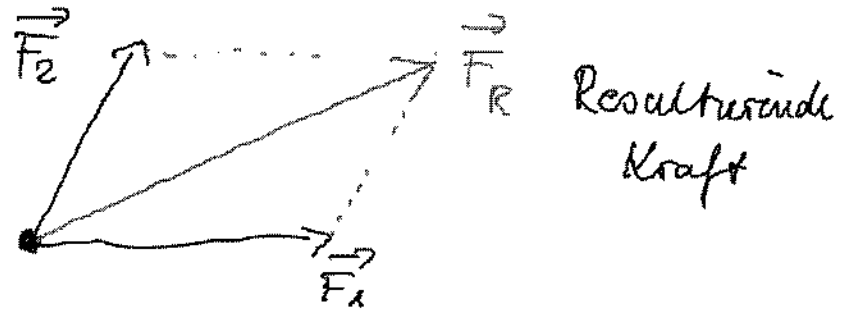
Spezielle Vektoren: $\vec{0}$ Nullvektor



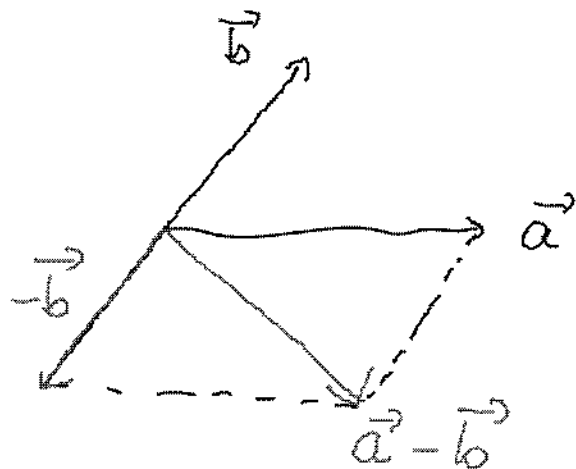
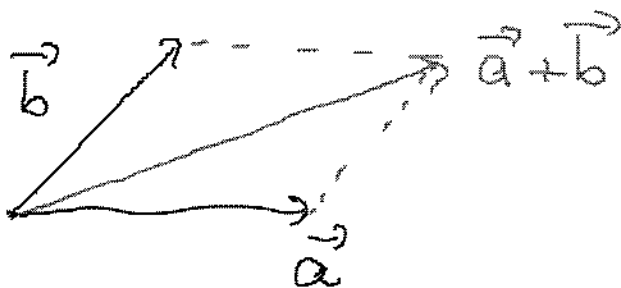
Vektoroperationen

1) Addition

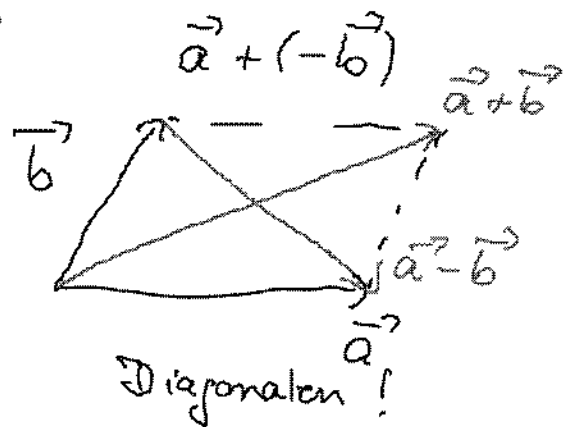
Bp. (Physik)



Def:

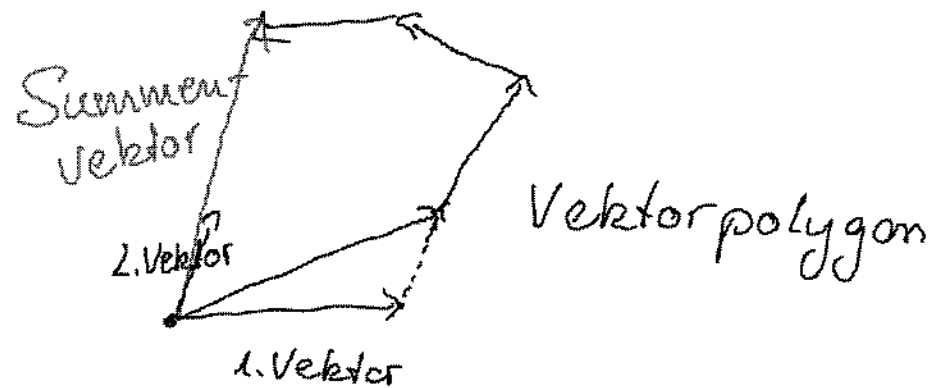


$\vec{a} - \vec{b}$



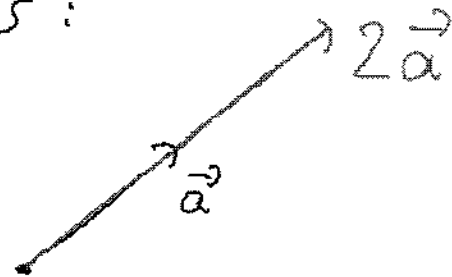
Regeln: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz
 $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz

Addition von mehreren Vektoren:



Multiplikation mit einem Skalar:

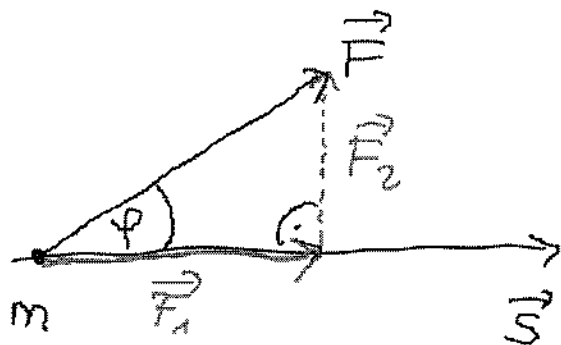
$$\vec{a} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Skalar}}}{2} \cdot \vec{a}$$



$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

$$|\vec{b}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

Skalarprodukt



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad \angle \vec{F}, \vec{s} = \varphi$$

$$\text{Arbeit } W : |\vec{F}_1| \cdot |\vec{s}|$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

$$W = |\vec{s}| |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Def: } \vec{a}, \vec{b} \quad \varphi = \angle \vec{a}, \vec{b} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$



c ist eine Skalar

Frage: $\vec{a} \perp \vec{b}$ d.h. $\angle \vec{a}, \vec{b} = 90^\circ$

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = ? \quad c = 0$$

Frage: gilt $\vec{a}(\underbrace{\vec{b} \cdot \vec{c}}_{\text{Skalar } \lambda}) = (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{\text{Skalar } \mu}) \cdot \vec{c}$ (Assoziativgesetz)

$\lambda \vec{a} \neq \mu \vec{c}$

$\nrightarrow$ nein

Bp: Winkelberechnung zwischen Vektoren

Aufgabe: Geg: $\vec{a} \cdot \vec{a} = 16$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 25$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$

Gesucht: $\angle \vec{a}, \vec{b}$

Lösung $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}| |\vec{a}| \cdot 1 = 16$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = 4$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \dots = \dots = 25$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

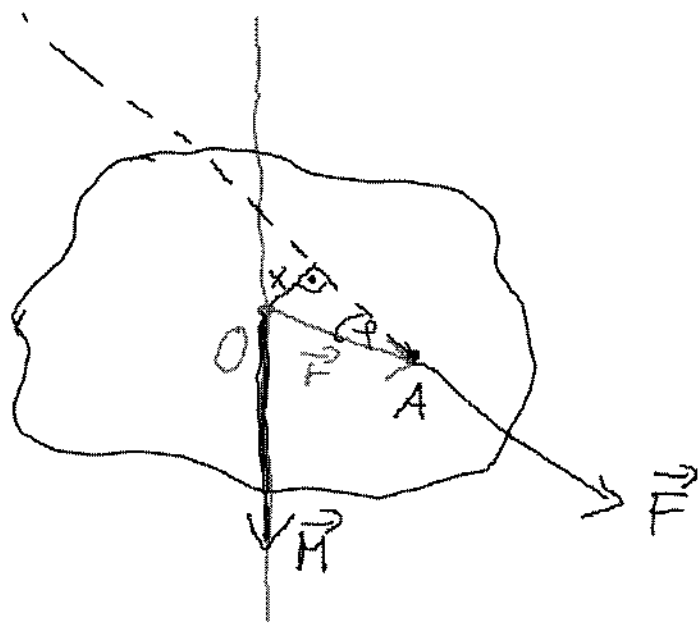
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 \cdot \cos \varphi$$

$$\Rightarrow 15 = 4 \cdot 5 \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{15}{20}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{15}{20}\right) \Rightarrow 41.4^\circ$$

Vektorprodukt

Bp. aus Physik



$$\vec{r} = \overrightarrow{OA}$$

x Abstand von Drehachse
zur Kraftwirkungsline
Hebelarm

$$x = |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Drehmoment : } |\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot x = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$

Def: Vektorprodukt

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren} \quad \angle \vec{a}, \vec{b} = \varphi$$

Das Vektorprodukt ist ein Vektor $\vec{c}$ mit
folgenden Eigenschaften:

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

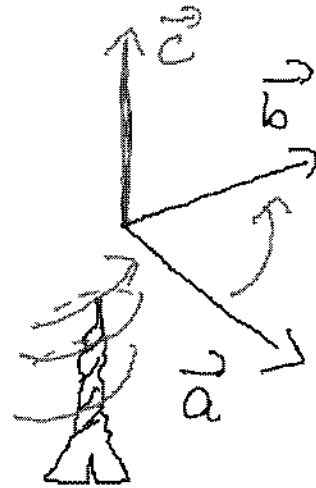
2) $\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein "Rechtssystem"

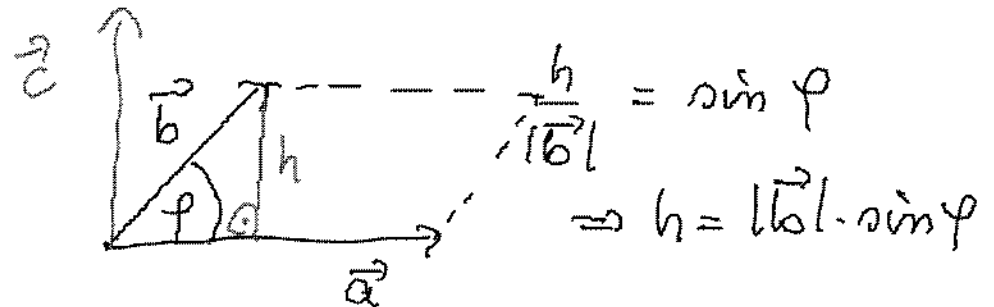
Schreibweise:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Kreuzprodukt



Geometrische Deutung



Flächeninhalt des Parallelogramms:

$$|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \\ = |\vec{c}|$$

Frage: Gilt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\text{Vektor} \perp \vec{a} \text{ und } \vec{b}}) \times \underbrace{\vec{c}}_{\text{Vektor} \perp \vec{b} \text{ und } \vec{c}}$? Maßzahl für Flächeninhalt

liegen in verschiedenen Ebenen, daher
nicht gleich!

Koordinatendarstellung von Vektoren

Gegeben $\vec{a}, \vec{b}$ mit $\vec{b} = \frac{2}{3} \vec{a}$

$$\vec{b} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

d.h. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

$$\rightarrow 3\vec{b} = 2\vec{a} \Rightarrow 3\vec{b} - 2\vec{a} = \vec{0}$$

Linearkombination aus
 $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Nullvektor
erzeugt

Def: Linearkombination

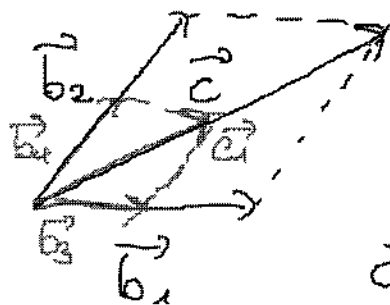
$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ Vektoren

$\vec{a}$ heißt Linearkombination von $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$$

$(\lambda_i \in \mathbb{R})$

Bp:



$$\vec{c} = 1 \cdot \vec{b}_1 + 1 \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{c}_1 = \vec{b}_3 + \vec{b}_4 = \frac{1}{2} \vec{b}_1 + \frac{1}{2} \vec{b}_2$$

Def: Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

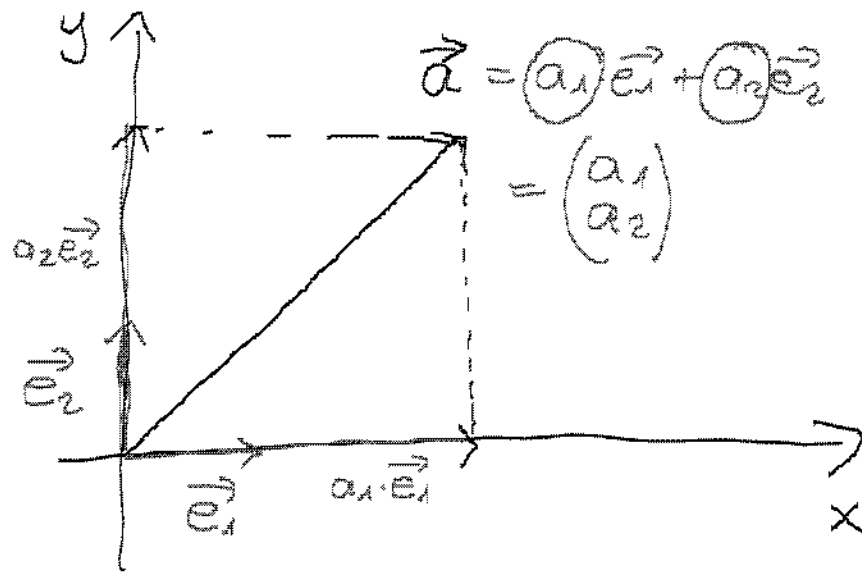
$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ heißen linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n = \vec{0}$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt

Sonst: Vektoren sind linear abhängig

Def: Koordinaten eines Vektors



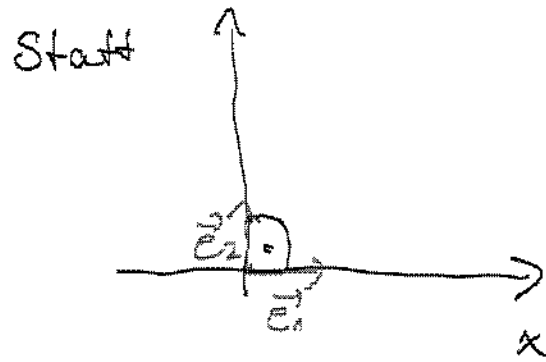
$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ linear
unabhängig
Basis von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $= \mathbb{R}^2$

$$|\vec{e}_1| = 1$$
$$|\vec{e}_2| = 1$$

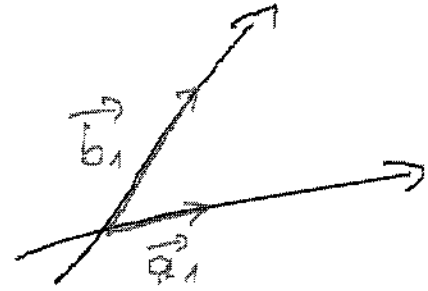
Aus $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ lassen sich alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ erzeugen!
 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ lin.-unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$

Bem: jeweils zwei lin.-unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$

$(\neq \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bilden auch eine Basis



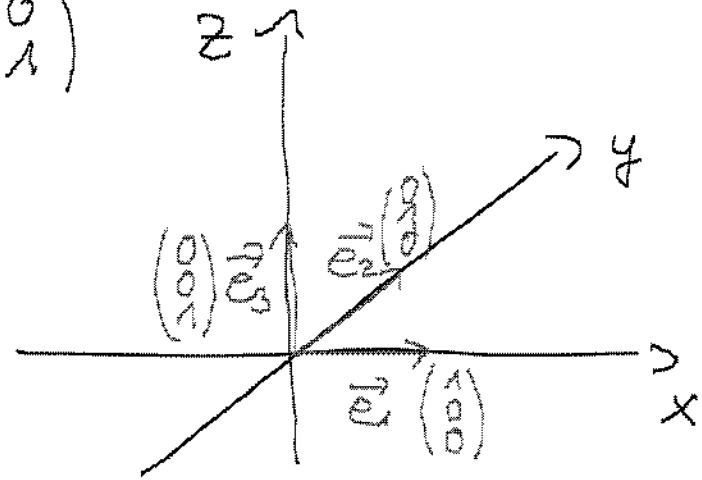
ginge auch



Koordinaten von $\vec{e}_1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

von $\vec{e}_2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verhältnisse im $\mathbb{R}^3$:



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$
Basis
des
 $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Tripel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Quadrupel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

Quintupel

--->

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

n-Tupel

Bp: Basis von $\mathbb{R}^5$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

auch als Zeilenvektor darstellbar: $(a_1 \dots a_n)$

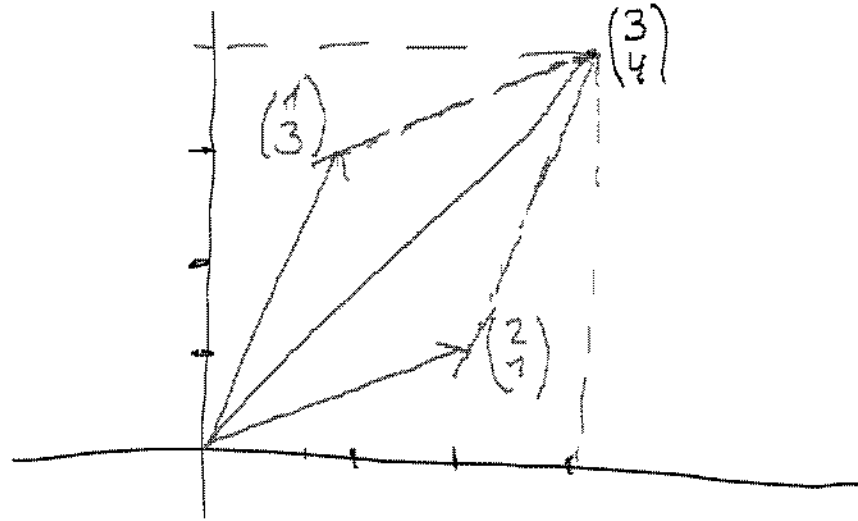
Rechnen mit Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_m = b_m \end{array} \quad \text{entsprechend:}$$
$$\begin{array}{cc} \geq & > \\ \leq & < \end{array}$$

Addition von Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Bsp: } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Multiplikation mit einem Skalar

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \rightarrow \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Bp:

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 5 \\ 100 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Mehl} \\ \text{Eier} \\ \text{Zucker} \\ \text{Salz} \\ \text{Wasser} \end{array} / 1 \text{ Portion}$$

für 5 Portionen

$$5 \begin{pmatrix} 200 \\ 5 \\ 100 \\ 1 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 25 \\ 500 \\ 5 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Vektoren zusammen mit der def. Addition (Subtraktion,
Multipl. mit Skalar bilden einen m-dimensionalen
Vektorraum V mit $\dim V = m$

Def: Länge eines Vektors

geg: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2}$$

$$|\vec{e}_i| = 1$$

$$|\vec{a}| = 2 \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{255}$$

Das Skalarprodukt von Vektoren in der Koordinatenschreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \in \mathbb{R}$$

Achtung: Nur Vektoren gleicher Dimension!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 100$$