12.12.12

1. Information 8.1.13 } Mathevorlesung
9.1.13 } + Übungen nach Plan

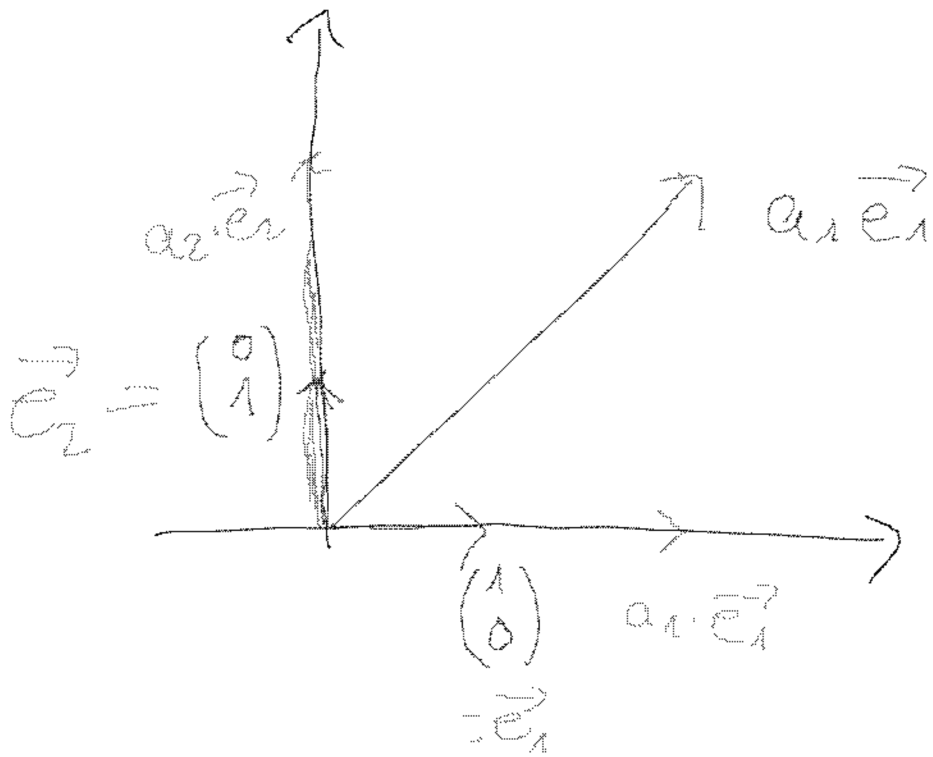
2. Information Zusatztutorium bei Aleksandr Tyuryaev
1. Termin 17.12.12 9.00-10.30
im Raum 3.111

meine Seite : www.gm.fh-koeln.de/schmitter

sm2008

PW Mario

Lineare Algebra : Rückblick



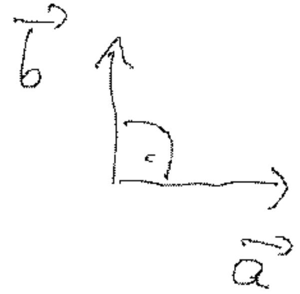
$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Def: Norm von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}$$

$$\left| \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \right| = 1 \quad \text{normierter Vektor}$$

In $\mathbb{R}^2$:



$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

In $\mathbb{R}^n$: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Winkel zwischen Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3$ mit Basis $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{e_1} + a_2 \cdot \vec{e_2} + a_3 \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{e_1} + b_2 \cdot \vec{e_2} + b_3 \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

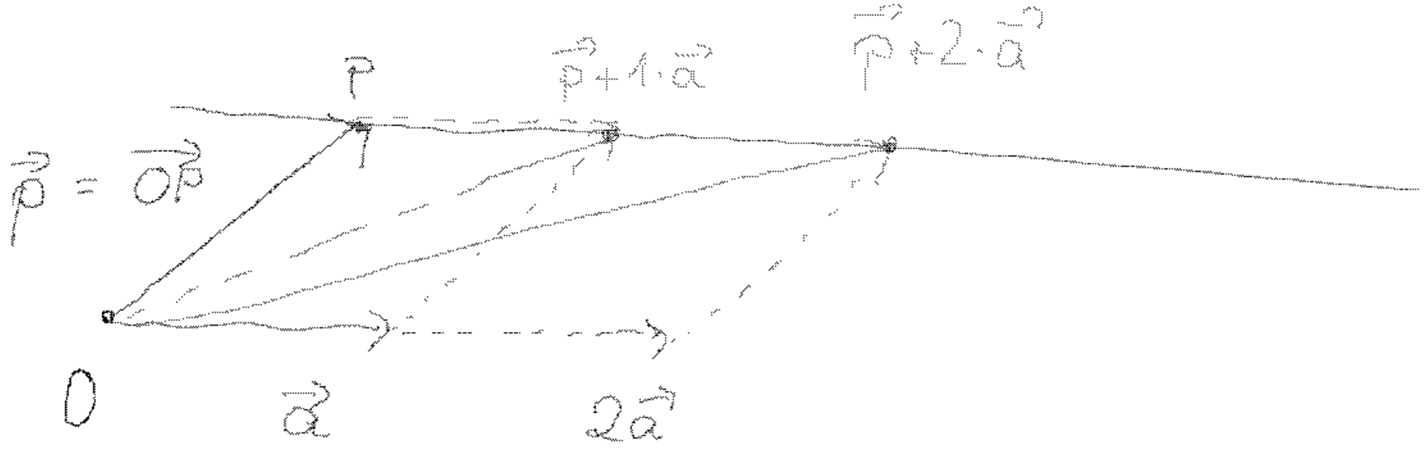
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Man kann also auch Winkel zwischen Vektoren im $\mathbb{R}^3$ berechnen!

Geraden und Ebenen



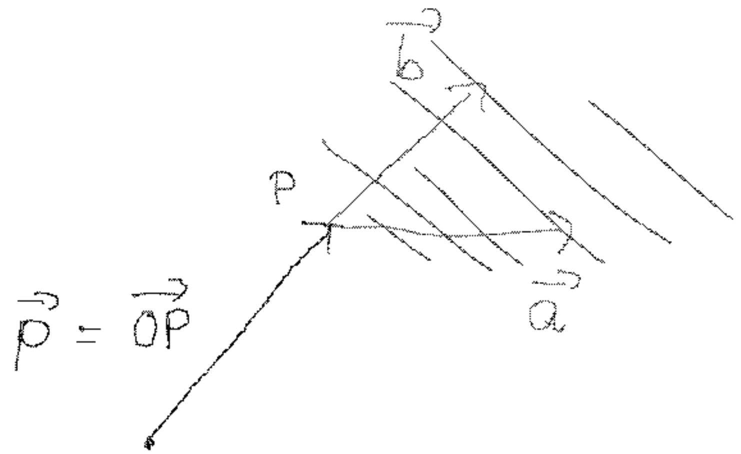
$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{a} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Gerade

Punkt-Richtungsform
Parameterform

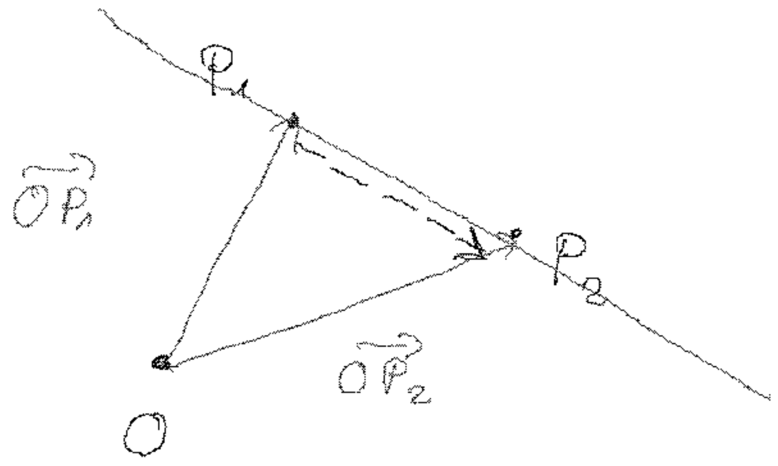
$\vec{p}$ heißt Ortsvektor

$\vec{a}$ Richtungsvektor



$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ Ebene

Bp: Geg: P_1, P_2 Punkte der Ebene O Ursprung



$\overrightarrow{OP_1}$ Ortsvektor

$$\vec{X} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right)$$

Zwei-Punkte-Form

Bp: $P_1 = (2,0,4)$ $P_2 = (2,2,2)$

Frage: Liegt $Q = (2,-2,6)$ auf der Geraden durch P_1 und P_2?

Geradengleichung: $\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$

Punktprobe mit Q: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

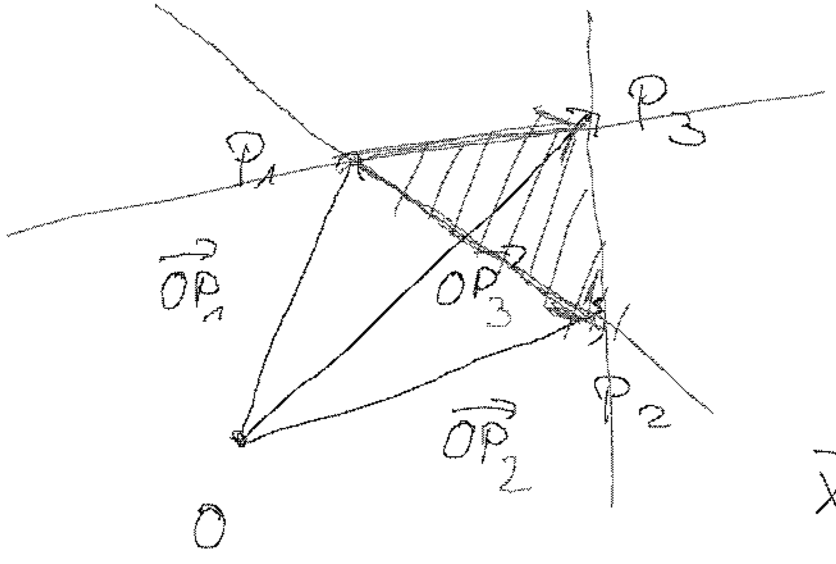
$$2 = 2 + \lambda \cdot 0$$

$$-2 = 0 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

$$6 = 4 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

damit: Q liegt auf der Geraden

Auf Ebenen übertragen:



Ebene durch P_1, P_2 und P_3 ?

$$\vec{x} = \vec{OP_1} + \lambda\left(\vec{OP_2} - \vec{OP_1}\right) + \mu\left(\vec{OP_3} - \vec{OP_1}\right)$$

Drei-Punkte-Form der Ebene

Koordinatenform der Ebene

Zu
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underset{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}{\vec{p}} + \lambda \underset{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}{\vec{a}} + \mu \underset{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}{\vec{b}} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

gibt es eine Koordinatengleichung: $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$

Wie erhält man diese ?

$$x_1 = p_1 + \lambda a_1 + \mu b_1$$
$$x_2 = p_2 + \lambda a_2 + \mu b_2$$
$$x_3 = p_3 + \lambda a_3 + \mu b_3$$

λ, μ werden eliminiert und mit Hilfe von x_1, x_2, x_3 ausgedrückt

Bp: $$E := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{I} \quad x_1 = 1 + 5\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_1 - 1 - 5\lambda \quad \text{I}'$$
$$\text{II} \quad x_2 = 2 + 6\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_2 - 2 - 6\lambda \quad \text{II}'$$
$$\text{III} \quad x_3 = 3 + 7\lambda + 9\mu \Rightarrow 9\mu = x_3 - 3 - 7\lambda \quad \text{III}'$$

$\text{I}' = \text{II}'$: $x_1 - 1 - 5\lambda = x_2 - 2 - 6\lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = x_2 - x_1 - 1} \; *$

$*$ in III' : $\boxed{\mu = \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)}$

λ und μ in $\underline{I}$, $\underline{II}$ oder $\underline{III}$:

in $\underline{I}$: $\quad x_1 = 1 + 5(x_2 - x_1 - 1) + 9 \cdot \frac{1}{9}(x_3 + 4 - 7x_2 + 7x_1)$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \; = \boxed{-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0}$$

Koordinatenform

Bp: $\quad E := 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$ $\quad$ ges. in Koord. form

Parameterform?

Vorgabe: $\quad x_1 = 1$

$\qquad\qquad x_2 = 2$ $\qquad \Rightarrow \quad 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3x_3 = 14$

$$3x_3 = 14 - 3 + 4$$

$$3x_3 = 15$$

$$\Rightarrow x_3 = 5$$

1. Punkt auf der Ebene $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Ortsvektor zu wählen !

2. Punkt auf der Ebene : $x_2 = -1,\ x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Punkt auf der Ebene : $x_1 = 0,\ x_2 = -7 \Rightarrow x_3 = 0$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{Ortsvektor}$$

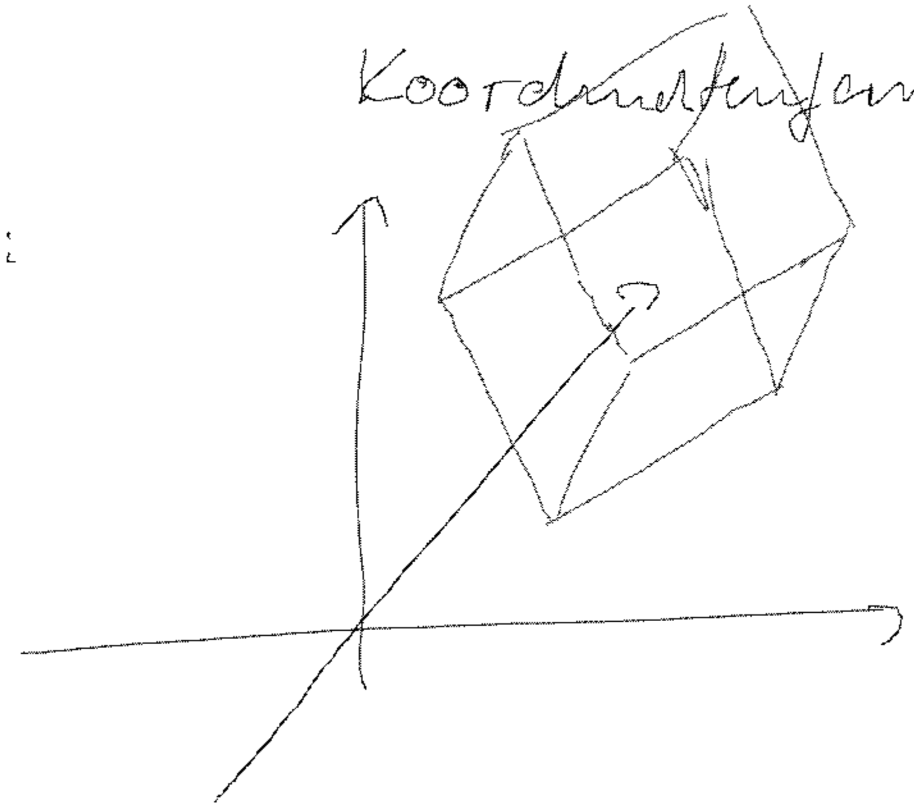
$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-2 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{1. Richtungsvektor}$$

$$\vec{OR} - \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -7-2 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{2. Richtungsvektor}$$

Parameterform: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$

Koordinatenform: $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14$

Bp:



Seitenflächen durch Ebenengleichungen beschreiben

Kanten durch Schnittgeraden der jew. Ebenen

Geraden im 3D-Raum

1) Schneiden sich in einem Punkt

oder 2) verlaufen parallel

oder 3) verlaufen in verschiedenen Richtungen aneinander vorbei "windschief"

Rechnerische Untersuchung von Geraden im 3D-Raum

Bp: $g_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$g_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ortsv. Richtungsv.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel

dadurch 2 Möglichkeiten : 1) Schneiden sich
2) windschief

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & \lambda + 6\mu &=& 1 \\ \mathrm{II} & 2\lambda + \mu &=& -2 \\ \mathrm{III} & \boxed{-\lambda = -2 \quad \lambda = 2} & * \end{array}$$

$* \text{ in } \mathrm{II}: \; 2\cdot(+2) + \mu = -2$

$+4 + \mu = -2 \quad |-4$

$\mu = -6 \quad (**)$

$** \text{ in } \mathrm{I}: \; +2 + 6\cdot(-6) = +2 - 36 = -34 \neq 1 \; ↯$

Erg: die Geraden sind windschief!

Erinnerung: Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

liefert $\vec{c}$ mit $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \qquad \sphericalangle\, \vec{a}, \vec{b} = \varphi$

$\vec{c}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b} \qquad \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$

$$\left.\begin{aligned} * \quad n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 &= 0 \\ n_1 \cdot b_1 + n_2 \cdot b_2 + n_3 \cdot b_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Auflösen nach n_1, n_2 und n_3

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} n_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ n_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ n_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

($\rightarrow$ kann später mit Determinante leicht berechnet werden!)

Berechnung eines Normalenvektors ($\perp$ zur Ebene)

Bp: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \\ -2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Weitere Darstellungsform einer Ebene:

$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \qquad |\vec{N}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{b} \cdot \vec{N} = 0$$

Für jeden Punkt der Ebene gilt: $\vec{OP} \cdot \vec{N} = \vec{OP_1} \cdot \vec{N}$

P, P_1

$$\underbrace{\vec{OP} \cdot \vec{N} - \vec{OP_1} \cdot \vec{N} = 0}$$

Sei $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0}$$

Hesse-Normal-Form

falls $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ ein Punkt der Ebene

Setzt man $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} = 0$

$$n_1(x - x_1) + n_2(y - y_1) + n_3(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1 x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1$$

$$A x + B y + C z = D$$

Bp: Gesucht sind die drei Darstellungsformen der Ebene, die durch $P_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ geht und senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ steht

$$\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 5 \\ z - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot 4 + (y+5)\cdot 2 + (z-3)\cdot 5 = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{4}x + \underline{2}y + \underline{5}z = 13$$

Punkt-Richtungsform : s. o.

Vektoren suchen

1 wird Ortsvektor

Differenzvektoren werden Richtungsvektoren

Matrizenrechnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \boxed{a_{ij}} & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow a_{ij}$$

i-te Zeile

j-te Spalte

$m \times n$ Matix

$m \times n$ Dimension : m Zeilen
n Spalten

A, B zwei $m \times n$-Matrizen gegeben "gleiche Dimension"

$$A \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} B \iff a_{ij} \overset{\geq}{\underset{\leq}{=}} b_{ij} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n \end{array}$$

Nullmatrix : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

3×3 $\qquad$ 3×3

$$B > A$$

Spezielle Matrizen

Quadratische Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad m \times m \text{ Matrix}$$

a_{ii}

Hauptdiagonale

Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

n x n Matrix

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Transponierte einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$-Matrix

Zeilen werden zu Spalten $\downarrow$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$(A')' = A$$

Bp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 7 & 8 & 6 \\ 1/2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 & 0 \\ 5 & 8 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche Dimension hat die Transponierte einer $(m \times 1)$ Matrix?

Lösung: $1 \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{Spaltenvektor}$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix}$$

$1 \times m$ Zeilenvektor

Symmetrische Matrizen: A $m \times m$ Matrix

A symmetrisch $\Leftrightarrow A = A'$

Bp:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix: quadratische Matrizen, die entweder oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonalen aus Nullen bestehen

Bp:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$