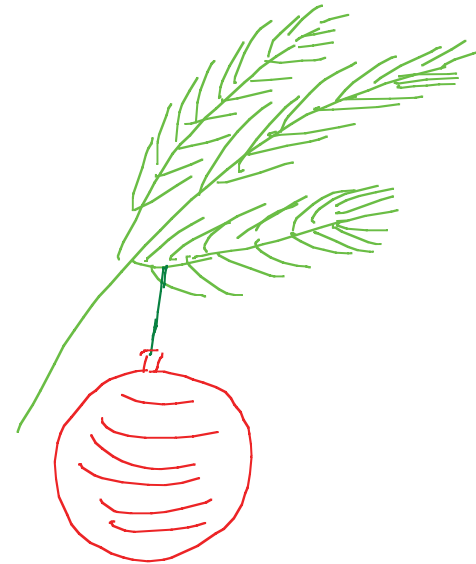


19.12.2012

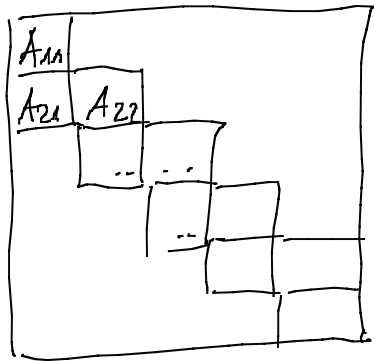
Letzte Vorlesung in 2012

nächste Vorlesung/Üb.: 9.1.2013 (MI)

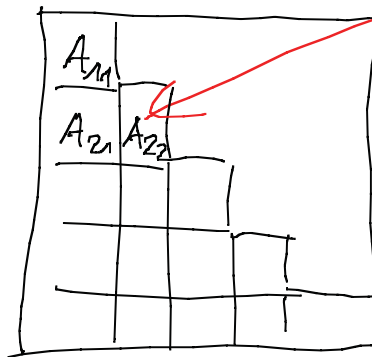
Di Üb. am 8.1.2013



In der Praxis: häufig sehr große Matrizen



Blockband-Matrix



Treppenstufen-Matrix

"Unter-Matrix"

Matrizenoperationen

1) Addition von Matrizen

A, B $m \times n$ -Matrizen

$$A \pm B = C \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$i = 1, \dots, m$
 $j = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A = D \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Bp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 \\ 10 & 6 & 22 \\ 1 & 10 & 22 \end{pmatrix}$$

Def: Untermatrizen

Auswahl bzw. Streichen von Zeilen und Spalten

Bp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & -4 & 8 \\ 13 & 0 & 6 & 3 & 2 \\ 7 & 16 & 21 & 9 & 11 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Auswahl von Zeile 2 und 4

" " Spalte 1 und 5

Dann $B = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ Untermatrix

Rechenregeln für Addition / Subtraktion / Multiplikation mit Skalar:

A, B, C $(n \times n)$ -Matrizen

$$A + B = B + A \quad \text{Kommutativgesetz}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{Assoziativgesetz}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$A + 0 = A$$

Nullmatrix

Nullmatrix ist "Nullelement"

Zu jeder Matrix A ex. Matrix D mit $A+D=0$

$$D = -A$$

$-A$ ist das inverse Element
bzgl. Addition

Es gilt auch : $(A \pm B)' = A' \pm B'$

Statt A'
manchmal auch
 A^T

Multiplikation von Matrizen

Bp: Drei Autofirmen A, B, C produzieren Kleinwagen (K), Mittelklassewagen (M) und Oberklassewagen (O)

pro Jahr eine konstante Zahl jeder Klasse

	K	M	O
A	1000	1500	500
B	1500	1000	600
C	700	1400	800

→

$$\begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix}$$

3x3 Matrix

Einnahmen pro Auto in den Jahren 04 bis 07 in €

	04	05	06	07
K	9900	10000	10500	11000
M	19000	19500	20000	21000
O	30000	31000	31500	33000

→

$$\begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix}$$

3x4 Matrix

Man möchte die Einnahmen der Firmen in den Jahren 04 - 07 berechnen.

Für die Einnahmen der Firma A im Jahr 04 multipliziert man die 1. Zeile mit der 04-Spalte skalar (Skalarprodukt des Zeilenvektors mit Spaltenvektor)

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} K & M & O \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1000 & 1500 & 500 \\ 1500 & 1000 & 600 \\ 700 & 1400 & 800 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 04 & 05 & 06 & 07 \end{matrix} \\ \begin{matrix} K \\ M \\ O \end{matrix} & \begin{pmatrix} 9900 & 10000 & 10500 & 11000 \\ 19000 & 19500 & 20000 & 21000 \\ 30000 & 31000 & 31500 & 33000 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 04 & 05 & 06 & 07 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 53.4 & 54.75 & 56.25 & 59 \\ 51.85 & 53.1 & 54.5 & 57.3 \\ 57.53 & 59.1 & 60.55 & 63.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

3×3 3×4 3×4

$1000 \cdot 9900 + 1500 \cdot 19000 + 500 \cdot 30000 = 53,4 \text{ Mio} \Rightarrow C_{11}$

C_{11} (red arrow to 53.4)
 C_{24} (red arrow to 57.3)
 C_{32} (red arrow to 59.1)
 3×4 (blue text)

$$C_{24} : 1500 \cdot 11000 + 1000 \cdot 21000 + 600 \cdot 33000 = 57.3 \text{ Mio} \Rightarrow C_{24} \text{ Einnahmen der Firma B im Jahr 07}$$

$$C_{32} : 700 \cdot 10000 + 1400 \cdot 19500 + 800 \cdot 31000 = 59.1 \text{ Mio} \quad \text{Einnahmen der Firma C im Jahr 05}$$

$$C_{21} : 1500 \cdot 9900 + 1000 \cdot 19000 + 600 \cdot 30000 = 51.85 \text{ Mio} \quad \text{Einnahmen der Firma B im Jahr 04}$$

Frage : (5×4) -Matrix mit (5×3) -Matrix multiplizieren, geht das ?

Nein

$(4 \times \boxed{5})$ -Matrix mit $(\boxed{5} \times 3)$ -Matrix " "

Ja

Frage : $A \cdot B$ sei definiert, gilt dann $B \cdot A$?

d.h. gilt das Kommutativgesetz ? Nein

Gegenbeispiel : (5×3) Matrix $\cdot$ (3×4) Matrix ergibt eine (5×4) -Matrix
 (3×4) Matrix $\cdot$ $(\underline{5} \times 3)$ Matrix das geht nicht !

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Aber es gilt $(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$ Assoziativgesetz

bitte als Übungsaufgabe allgemein zeigen und ggf für Sonderpunkte
in Übung vorrechnen!

Und es gilt $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ Distributivgesetz

Bp: Ein Unternehmen produziert Produkte P_1 und P_2 in den Mengen x und y und zwar in den Monaten Januar - März wie folgt:

	x	y
Jan	5	3
Feb	9	7
März	4	11

Die Preise gelten für alle Monate gleich: p $\begin{matrix} x & y \\ 50 & 90 \end{matrix}$ pro Stück

Berechnen Sie die monatlichen Einnahmen!

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} x & y \\ \text{2x1} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} x & y \\ \text{2x1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 50 + 3 \cdot 90 \\ 9 \cdot 50 + 7 \cdot 90 \\ 4 \cdot 50 + 11 \cdot 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 1080 \\ 1190 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Jan} \\ \text{Feb} \\ \text{März} \end{matrix}$$

$$\text{Bp: } \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 4 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 6 & 7 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \times 5 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 126 & 18 & 47 & 59 & 26 \\ 11 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 89 & 12 & 8 & 24 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times 5 \end{matrix}$$

Besonderheiten der Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned}
 \text{in } \mathbb{R} : \quad a^2 = a &\Rightarrow a = 1 \quad \text{oder} \quad a = 0 \\
 bc = 0 &\Rightarrow b = 0 \quad \text{oder} \quad c = 0 \quad \text{oder} \quad b = c = 0 \\
 d^2 = 1 &\Rightarrow d = 1 \quad \text{oder} \quad d = -1 \\
 e^2 = 0 &\Rightarrow e = 0
 \end{aligned}$$

Sei A Matrix:

$$\text{B,C} \quad A^2 = A \cdot A = A \quad \text{das kann auch gelten, auch wenn } A \neq E \quad \text{oder } A = 0$$

$$\text{Bp: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bitte nachprüfen!}$$

$$B \cdot C = 0 \quad \text{obwohl } B \neq 0, \quad C \neq 0$$

$$\text{Bp: } B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Nullmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Nullmatrix} \quad \text{bitte nachprüfen!}$$

Rückblick : Inverses Element in $\mathbb{R}$ bzgl. $\cdot$:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

$$8 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

In der Matrizenrechnung:

A

$(n \times n)$ -Matrix, quadratische Matrix

B inverse Matrix (Inverse) zu $A \Leftrightarrow B \cdot A = A \cdot B = E$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \end{pmatrix}$

$$B = A^{-1}$$

Merke: Nicht jede quadratische Matrix besitzt Inverse

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A \cdot B = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E

$$a + 0 \cdot c = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$b + 0 \cdot d = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$a + 0 \cdot c = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$b + 0 \cdot d = 1 \Rightarrow b = 1$$

Satz: Jede reguläre Matrix besitzt genau eine Inverse

Beweis: Ann.: A regulär und besitze die Inversen B und C

Dann gilt: $A \cdot C = A \cdot B = B \cdot A = E$

$$\boxed{B} = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = \boxed{C}$$

$$\Rightarrow B=C$$

Berechnen der Inversen einer (2×2) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ Sei } A^{-1}$$

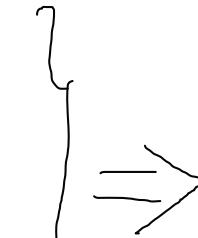
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1$$

$$a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0$$

$$a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0$$

$$a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1$$



$$a_{11}x_{11} - 1 = -a_{12}x_{21}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_{11}$$

$\Downarrow$

: weitere Umformungen

$\Downarrow$

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_{21} = -a_{21}$$

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_{12} = -a_{12}$$

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_{11} = a_{22}$$

$$(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_{22} = a_{11}$$

$= D$

(Determinante von A)

$$\text{Damit } A^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Ökonomische Anwendung von Matrizen

(1) Die Firma Holzbau KG fertigt Wochenendhäuser des Typen
Alb, Rhön, Taunus

	Stahl	Holz	Glas	Arbeits-einh.	
Alb	5	6	4	17	=: M 3x4 Materialbedarfsmatrix
Rhön	7	8	5	21	
Taunus	6	7	7	15	

Auftrag an die Firma: $A = \begin{pmatrix} \text{Alb} & \text{Rhön} & \text{Taunus} \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

Materialbedarf für Auftrag : $A \cdot M = \begin{pmatrix} \text{Stahl} & \text{Holz} & \text{Glas} & \text{Arbeit} \\ 139 & 162 & 134 & 391 \end{pmatrix}$

1x3 1x4

$P = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 3 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Stahl} \\ \text{Holz} \\ \text{Glas} \\ \text{Arbeit} \end{matrix}$

(Preise/Materialeinheit)

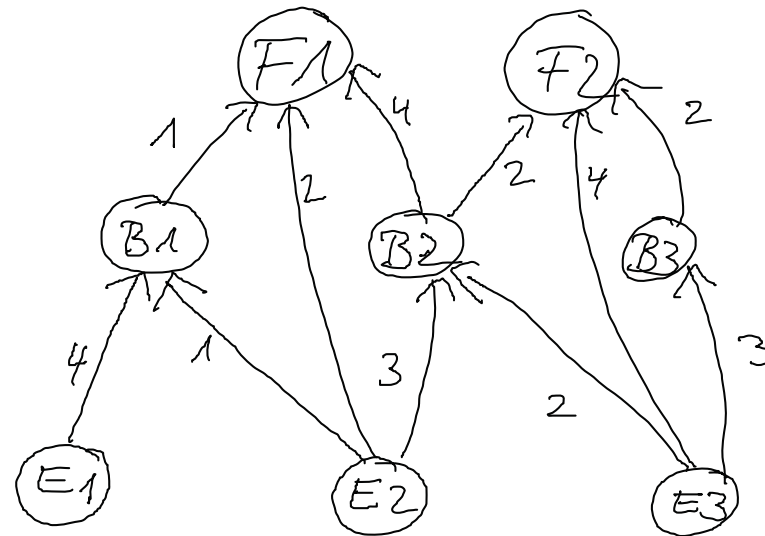
$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 692 \\ 885 \\ 696 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Alb} \\ \text{Rhön} \\ \text{Tannus} \end{matrix}$$

Herstellungskosten für 1 Haus

$$\underset{1 \times 3}{A} \cdot \underset{3 \times 1}{(M \cdot P)} = \underbrace{(A \cdot M)}_{1 \times 1} \cdot P = 17122 \quad \text{Herstellungskosten für den Auftrag}$$

Gozintograph

("The part that goes into")



	E1	E2	E3	B1	B2	B3	F1	F2
E1	0	0	0	4	0	0	0	0
E2	0	0	0	1	3	0	2	0
E3	0	0	0	0	2	3	0	4
B1	0	0	0	0	0	0	1	0
B2	0	0	0	0	0	0	4	2
B3	0	0	0	0	0	0	0	2
F1	0	0	0	0	0	0	0	0
F2	0	0	0	0	0	0	0	0

Teilebedarfsmatrix

	F1	F2
F1	1	0
F2	0	1
B1	1	0
B2	4	2
B3	0	2
E1	4	0
E2	15	6
E3	8	14